24 ('03 神戸大) 【難易度】… 標準

a は 1 より大きい定数とする．関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする．2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき，a の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．a が (1) で求めた値をとるとき，曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

(1) は，対称式を用いて計算を行わないと大変です．解と係数の関係から得られる式は対称式なのでそれとの関連をしっかりと理解しておきましょう．(2) は，$\alpha,\ \beta$ が $f'(x)=0$ の解であることを利用して，公式を使います．

解答

(1) $f(x)=(x+1)(x^2-a^2)=x^3+x^2-a^2x-a^2$ であるから，

$$f'(x)=3x^2+2x-a^2$$

となる．題意より $f'(x)=0$ の 2 解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{3}a^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは，

$$f'(-1)=3-2-a^2=1-a^2$$

であることから，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=1-a^2 \quad \cdots\cdots ③$$

をみたす a の値を求めればよい．

$$f(\alpha)=\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2$$

$$f(\beta)=\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2$$

より，

$$\begin{aligned} f(\beta)-f(\alpha)&=(\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2)-(\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2) \\ &=(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)-a^2(\beta-\alpha) \\ &=(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+\beta+\alpha-a^2) \end{aligned}$$

であるから，③ へ代入して，

$$\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+\beta+\alpha-a^2=1-a^2$$

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta=1$$

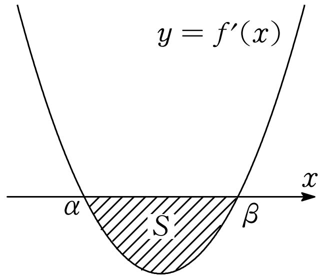
①, ② を代入して,

$$\frac{4}{9}+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}=1$$

$$4+3a^2-6=9 \iff a^2=\frac{11}{3}$$

$a>1$ であるから, $\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{33}}{3}}$……(**答**)

(2) 題意から, $y=f'(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標が α, β であるから, 求める面積 S は,



$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta (-f'(x))\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (3x^2+2x-a^2)\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{-3}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

ここで,

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{3}=\frac{48}{9}$$

となり, $\beta-\alpha>0$ であるから, $\beta-\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ である. よって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{64\cdot 3\sqrt{3}}{27} \\ &= \boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{9}}\text{……(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は, 問題に忠実に式を作りますが, 対称式の計算が必要になるので, $f(\beta)-f(\alpha)$ をうまく計算しなければいけません. 解と係数の関係が解法のポイントとなります.

(2) は, 放物線と直線で囲まれる部分の面積を求めるので, 以下の公式が利用できます.

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

教科書や参考書などでは, a がない形で書かれていると思いますが, 実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので, 2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう. これは, 面積計算をする際によく用いられます.