21 （'06　九州大） 【難易度】 … 標準

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n b_n \\ b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2 \end{cases}$$

をみたすものとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ．

（2） $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) は，数学的帰納法を用いて証明を行います．(2) は，背理法を用いて証明します．a_n と b_n が互いに素でないと仮定すると素数 p を公約数にもつという事実を利用しましょう．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

（ i ） $n = 3$ のとき，

与えられた漸化式に $n = 1$ を代入して $a_2 = 2, b_2 = 3$ を得るので，さらに $n = 2$ を代入して，

$$a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12,\ b_3 = 8 + 9 = 17$$

よって，a_3 は 3 で割り切れ，b_3 は 3 で割り切れないので，$n = 3$ のとき成り立つ．

（ii） $n = k\ (k \geqq 3)$ のとき，

$$a_k = 3l,\quad b_k = 3m \pm 1 \qquad (l, m \text{ は整数})$$

が成り立つと仮定すると，与えられた漸化式に $n = k$ を代入して

$$a_{k+1} = 2 \cdot 3l \cdot (3m \pm 1)$$

$2l(3m \pm 1)$ は整数であるから a_{k+1} は 3 で割り切れる．さらに，

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 2 \cdot 9l^2 + (3m \pm 1)^2 \\ &= 18l^2 + 9m^2 \pm 6m + 1 \\ &= 3(6l^2 + 3m^2 \pm 2m) + 1 \end{aligned}$$

$6l^2 + 3m^2 \pm 2m$ は整数であるから，b_{k+1} は 3 で割り切れない．

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上より，3 以上のすべての自然数により，題意は成り立つことが示された． **【証明終】**

(2) **【証明】**

$n = 2$ のとき，$a_2 = 2, b_3 = 3$ であるから，題意をみたす．次に，$n \geqq 3$ 以上に対して，a_n と b_n が互いに素でないと仮定すると，a_n と b_n は素数 p を公約数にもつ．このとき，与えられた漸化式から

$$b_{n+1} - {b_n}^2 = 2{a_n}^2$$

であるから，b_{n+1} と b_n^2 の偶奇は一致する．b_n^2 と b_n の偶奇は一致することから b_{n+1} と b_n の偶奇は一致する．ここで，$b_1=1$ であることから，b_n は奇数であることがわかる．よって，公約数である素数 p は奇数となる．次に，$a_n=2a_{n-1}b_{n-1}$ より，a_n が p で割り切れることから a_{n-1} か b_{n-1} の少なくとも一方は p で割り切れる．

（ i ） a_{n-1} が p で割り切れるとき，

$b_{n-1}{}^2=b_n-2a_{n-1}{}^2$ であるから $b_{n-1}{}^2$ が p で割り切れるので，b_{n-1} は p で割り切れる．

（ii） b_{n-1} が p で割り切れるとき，

$2a_{n-1}{}^2=b_n-b_{n-1}{}^2$ であるから $2a_{n-1}{}^2$ は p で割り切れる．$p \geqq 3$ であるから a_{n-1} が p で割り切れる．

以上より，a_{n-1}, b_{n-1} はともに p で割り切れることが示されたので，これを繰り返すことで a_2, b_2 はともに p で割り切れることになるが，$a_2=2, b_2=3$ であるから矛盾．よって，$n \geqq 2$ のとき a_n, b_n は互いに素であることが示された． **【証明終】**

◇ ♡

解説

(1) は，数学的帰納法で示します．$a_k=3l, b_k=3m\pm 1$ と置くことがポイントとなります．b_k は 3 で割れない数なので，2 通りのタイプが考えられますが，$b_{3k}=3m\pm 1$ とおくことで 1 回の計算で済みます．次に (2) は論証問題です．背理法を用いて示します．a_n, b_n が互いに素であるとは，最大公約数が 1 であることを言います．すなわち，a_n, b_n が互いに素でなければ，必ず 1 以外の公約数が存在することになります．整数は，素数の積で表されるので，公約数を素数 p としています．(i) では，b_n と a_{n-1} が p で割り切れるので，$b_{n-1}{}^2$ が p で割り切れます．そうすると b_{n-1} も p で割り切れることが分かります．(対偶法を用いれば簡単に証明できます．) (ii) も同様です．論証問題は，他の問題に比べて受験生が苦手とする問題ですが，演習量が足りない人が多いだけのように感じます．志望校の過去問を調べて，論証問題がよく出ているようならこのタイプの問題をしっかり演習しておきましょう．