20 （'82　岡山大） 【難易度】 … 標準

関数 $y=f(x)$ は $x \leqq 0$ で連続で，$x<0$ で第 1 次導関数および第 2 次導関数をもち，次の（ア），（イ）を満たす．

（ア） $f(-2)=-\dfrac{8}{3}$，　$f'(-2)=2$

（イ） 任意の負数 a に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線が，曲線 $y=f'(x)$ 上の点 $(a,\ f'(a))$ における接線と直交する．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=f'(x)$ および直線 $x=a\ (a<0)$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とするとき $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r}$ が有限となるような r の範囲を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

条件（イ）から $f'(a)f''(a)=-1$ が得られますが，任意の負数 a に対して成り立つので，a を x に変えて $f'(x)f''(x)=-1$ を考えます．後は，不定積分を行い $f'(x)$, $f(x)$ を求めていきましょう．

♣ ♠

解答

(1) a を任意の負数とするとき，$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり，$y=f'(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f''(a)$ である．よって，条件（イ）より

$$f'(a)f''(a)=-1$$

が成り立つ．これより，$x<0$ に対して，$f'(x)f''(x)=-1$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\int f'(x)f''(x)\,dx=\int(-1)\,dx &\iff \int\frac{1}{2}\left[\{f'(x)\}^2\right]'\,dx=-\int dx\\ &\iff \frac{1}{2}\{f'(x)\}^2=-x+C\quad (C：\text{積分定数})\\ &\iff f'(x)=\pm\sqrt{-2x+2C}\ \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

条件（ア）より，$f'(-2)=2(>0)$ であるから ① の符号は ＋ の方をとり，$\sqrt{4+2C}=2$ より $C=0$ を得る．したがって，$\boldsymbol{f'(x)=\sqrt{-2x}}$……**(答)**

(2) (1) より，$f'(x)=\sqrt{-2x}=\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx=\int\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\,dx &\iff f(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\cdot(-1)+C\quad (C：\text{積分定数})\\ &\iff f(x)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

条件（ア）より，$f(-2)=-\dfrac{8}{3}$ であるから，

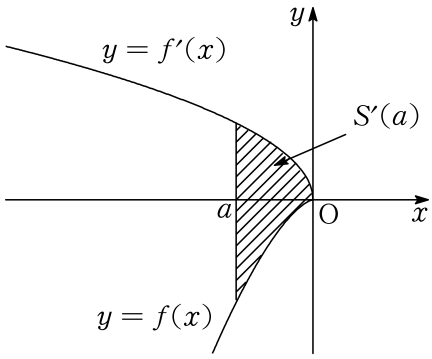
$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}2^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{8}{3}\iff -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot2\sqrt{2}+C=-\frac{8}{3}\qquad \therefore\ C=0$$

このとき，$f(x)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{-x}$ となるので，$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{-x}}$……**(答)**

(3)　2 曲線はいずれも原点を通り，$x<0$ において，

$$f(x)<0<f'(x)$$

を満たすので，$S(a)$ は右図の斜線部分の面積を表す．



ゆえに，

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^0 \{f'(x)-f(x)\}\,dx \\
&= \int_a^0 \left\{f'(x)+\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right\}dx \\
&= \left[\,f(x)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}(-x)^{\frac{5}{2}}\,\right]_a^0 \\
&= -f(a)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}(-a)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}(-a)^{\frac{3}{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}(-a)^{\frac{5}{2}} \\
&= (-a)^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3a}+\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r} &= \lim_{a\to-\infty}(-a)^{\frac{5}{2}-r}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3a}+\frac{4\sqrt{2}}{15}\right) \\
&= \begin{cases} +\infty & \left(r<\frac{5}{2}\right) \\ \frac{4\sqrt{2}}{15} & \left(r=\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(r>\frac{5}{2}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r}$ が有限な値に収束するための r の条件は，$\boldsymbol{r \geqq \frac{5}{2}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

不定積分を行うときは，積分定数を付けることを忘れてはいけません．本問では，条件から積分定数が 0 となりますが，積分定数を書かなければ，いくら答えが合っていても原点は避けられません．条件によっては，0 にならないこともあるからです．(3) の問題のテーマは，極限が収束するための条件を求めることです．必ずできるようになっておいて下さい．頻出まではいかないものの，とても大切な考え方を含んでいます．類題もたくさんあるので，探して解いておきましょう．