19 （′09　甲南大・改） 【難易度】 … 標準

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ k > 0$ とする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

(1) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{k^2}{a}\right) \geqq (k+1)^2$

(2) $\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\left(c+\dfrac{k^2}{b}\right)\left(a+\dfrac{k^2}{c}\right) \geqq (k+1)^4$

【テーマ】：不等式の証明（相加平均・相乗平均の関係）

方針

(1) は左辺を展開して相加平均・相乗平均の関係を用います．(2) は (1) を利用します．どちらも等号成立条件を忘れないようにしましょう．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{k^2}{a}\right)=ab+k^2+1+\dfrac{k^2}{ab}$ であり，$ab>0,\ k^2>0$ であることから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$ab+\frac{k^2}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{k^2}{ab}}=2k$$

が成り立つ．等号は，$ab=\dfrac{k^2}{ab}$ すなわち，$ab=k$ のとき，成立する．ゆえに，

$$ab+\frac{k^2}{ab}+k^2+1 \geqq 2k+k^2+1 \iff \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{k^2}{a}\right) \geqq (k+1)^2$$

が成り立つことから，題意は示された． **（証明終）**

(2) **【証明】**

(1) より，

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right) \geqq (k+1)^2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right) \geqq (k+1)^2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ．①, ② の辺々をかけて，

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right) \geqq (k+1)^4 \cdots\cdots \text{③}$$

を得る．ここで，①, ② の等号成立条件は，(1) から，それぞれ $bc=k,\ ca=k$ すなわち $a=b,\ ac=k$ である．ゆえに，③ の等号が成り立つ $a,\ b,\ c,\ k$ が存在するので，題意は示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

(1) は，相加平均・相乗平均の関係を用いる基本問題なので，完答を目指しましょう．(2) では，文字を置き換えることで (1) で示した不等式を利用しますが，辺々をかけるときは注意が必要です．③ の等号が成り立つ $a,\ b,\ c,\ k$ が存在するか否かを確かめる必要があります．もしも存在しなければ，③ の式から等号を消さないといけません．そのチェックを怠れば減点される可能性がありますので，十分に注意を払いましょう．