18 【難易度】 … 標準

$0° < \alpha < 90°$ とするとき，次の各問いに答えよ．

（1） $\cos 3\alpha = \sin 2\alpha$ を満たす α の値を求めよ．また，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

（2） 半径 1 の円に内接する正五角形 ABCDE において $\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ．

【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

(1) で α の値を求めるために，まず cos に統一し角度を比較します．$\sin\alpha$ の値を求めるときは，cos の 3 倍角の公式を使って $\sin\alpha$ に関する 2 次方程式を導きます．(2) $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ をそれぞれ α を用いて表します．

♣ ♠

解答

（1） $\sin 2\alpha = \cos(90° - 2\alpha)$ であるから，

$$\cos 3\alpha = \cos(90° - 2\alpha) \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．ここで，$0° < 3\alpha < 270°$, $-90° < 90° - 2\alpha < 90°$ であることから，① が成り立つための条件は，

$$3\alpha = 90° - 2\alpha$$

である．これを解いて，求める α の値は，$\boldsymbol{\alpha = 18°}$……**(答)**

また，$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$，$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ であることから，与式は

$$-3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

と変形できる．$\cos\alpha \neq 0$ より，

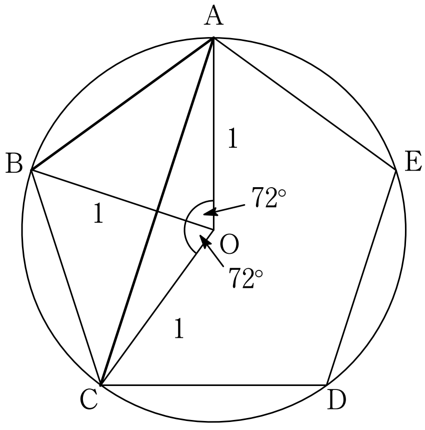
$$-3 + 4\cos^2\alpha = 2\sin\alpha \iff -3 + 4(1 - \sin^2\alpha) = 2\sin\alpha$$

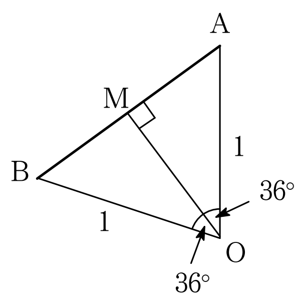
$$\iff 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0 \quad \cdots\cdots②$$

より，$\sin\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ を得る．$0° < \alpha < 90°$ であるから，$\sin\alpha > 0$ ．よって，

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

（2） 円の中心を O とする．





AB の中点を M とすると，△OAM において，

$$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin 36^\circ=\overline{\mathrm{OA}}\sin 2\alpha=\sin 2\alpha$$

となる．$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}$ であるから，$\overline{\mathrm{AB}}=2\sin 2\alpha$ となる．

同様に考えて，

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{OA}}\sin 72^\circ=2\cos 18^\circ=2\cos\alpha \qquad (☜\ \ \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta)$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}&=4\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\\&=8\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha\\&=8\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)\end{aligned}$$

となる．② より，$\sin^2\alpha=\dfrac{-2\sin\alpha+1}{4}$ であるから，

$$\begin{aligned}8\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)&=8\sin\alpha\left(1-\frac{-2\sin\alpha+1}{4}\right)\\&=8\sin\alpha\cdot\frac{2\sin\alpha+3}{4}\\&=4\sin^2\alpha+6\sin\alpha\\&=-2\sin\alpha+1+6\sin\alpha\quad(\because\ \ ②)\\&=4\sin\alpha+1\\&=4\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1\\&=\sqrt{\mathbf{5}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) の問題は，『$\sin 3\alpha=\sin 2\alpha$ を満たす α を求めよ』という問題が，1992 年に京都大学で出題されている．この種の問題は，(1) で取り扱われ，その後の問題に大きく影響していくので，確実に得点できる力を養っておく必要がある．

(2) は，正五角形を扱う問題で (1) で得られた 18° という角度と正五角形の内部にできる 36°, 72° との関係をしっかりと見定めて (1) の結果を利用する必要がある．ちなみに $\overline{\mathrm{AB}}$ は，線分 AB の長さを表している．解答も問題に合わせて $\overline{\mathrm{AB}}$ 等とかいた．