16 ('09 北海道大) **【難易度】** … 標準

座標平面上の点 (a, b) で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ．$y = 3x^2 - 6x$ で表される放物線を C とする．n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2 - 6n)$ をとる．原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．C と線分 OP で囲まれる図形を D とする．ただし，D は境界を含むとする．$0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して，直線 $x = k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(k)$ を求めよ．

(2) D に含まれる格子点の総数を求めよ．

(3) $f(k)$ が最大になるような k を求めよ．

【テーマ】：格子点問題

方針

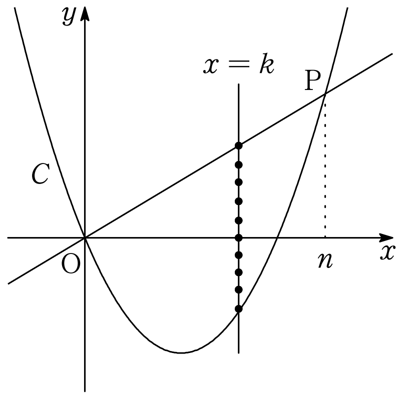
領域を図示して，$x = k$ 上の格子点の個数を求めます．あとは，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として加えれば，領域内の格子点の個数が求められます．

♣ ♠

解答

(1) 直線 OP の方程式は，$y = (3n - 6)x$ である．直線 $x = k$ と直線 OP および放物線 C との交点の y 座標は，それぞれ

$$(3n-6)k, \quad 3k^2 - 6k$$



であり，n, k がともに整数であることから，これらはともに整数となる．ゆえに，

$$f(k) = (3n-6)k - (3k^2 - 6k) + 1$$
$$= \boldsymbol{-3k^2 + 3nk + 1} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) (1) より，領域 D に含まれる格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n}(-3k^2 + 3nk + 1)$$
$$= -3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)\{-n(2n+1) + 3n^2 + 2\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(n^2 - n + 2)} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) (1) より，

$$f(k) = -3\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 + 1$$

である．ここで，n, k は整数であるから，$f(k)$ が最大となるのは，次の場合に分けられる．

(i) n が偶数のとき

$k = \dfrac{n}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{3}{4}n^2 + 1$ をとる．

(ii) n が奇数のとき

$k = \dfrac{n \pm 1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{3}{4}n^2 + \dfrac{1}{4}$ をとる．

以上より，$f(k)$ が最大になるような k の値は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \textbf{ が偶数のとき，} & \boldsymbol{k = \dfrac{n}{2}} \\ \boldsymbol{n} \textbf{ が奇数のとき，} & \boldsymbol{k = \dfrac{n \pm 1}{2}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

格子点を求める最も基本的なタイプの問題です．領域内の格子点の個数を求めるときは，まず $x=k$ 上にある格子点の個数を求めて k の値を変えてそれらを加えていきます．問題によっては，$y=k$ 上にある格子点の個数を求めた方が計算が楽になる場合もあります．注意したいのは，$x=k$ と直線 OP および放物線 C との交点の y 座標が整数になっている点です．もしも整数でなければそれを超えない最大の整数を考えなければならなくなります．特に，曲線が $y=\log x$ のようになったときに注意しましょう．