12 （'92　京都大）　**【難易度】** … **標準**

平面ベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ の内積を $\vec{p}\cdot\vec{q}$ と表す．f は平面上の 1 次変換とする．

(1)　$\vec{p}, \vec{q}$ が互いに直交する単位ベクトルとすると，$T = f(\vec{p})\cdot\vec{p} + f(\vec{q})\cdot\vec{q}$ は，ベクトルの組 $\vec{p}, \vec{q}$ のとり方によらないで，f によってきまる値であることを示せ．

(2)　原点 O を通る 2 つの定直線 l と m があって，f によって l 上の任意の点 R は R 自身に移され，m 上の任意の点 S は OS の中点 S′ に移されるとする．このとき f に対する T の値を求めよ．

【テーマ】：１次変換

方針

$\vec{p}, \vec{q}$ をどのように設定するかがポイントです．設定さえできれば，後は計算問題になります．

♣　♠

解答

(1) **【証明】**

$\vec{p} \perp \vec{q}$ かつ $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{q}\right| = 1$ であることから，

$$\vec{p} = (\cos\theta,\ \sin\theta)\ ,\quad \vec{q} = (-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

とおくことができる．

f を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta \\ c\cos\theta + d\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{q}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta + b\cos\theta \\ -c\sin\theta + d\cos\theta \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned} f(\vec{p})\cdot\vec{p} &= (a\cos\theta + b\sin\theta)\cos\theta + (c\cos\theta + d\sin\theta)\sin\theta \\ &= a\cos^2\theta + (b+c)\sin\theta\cos\theta + d\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{q})\cdot\vec{q} &= (-a\sin\theta + b\cos\theta)(-\sin\theta) + (-c\sin\theta + d\cos\theta)\cos\theta \\ &= a\sin^2\theta - (b+c)\sin\theta\cos\theta + d\cos^2\theta \end{aligned}$$

となり，これらを加えると $T = a + d$ となるので，これは f によって決まり，θ には無関係である．

ゆえに，示された．　**（証明終）**

(2)　l, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{l} = (p,\ q),\ \vec{m} = (r,\ s)$ とすると，$\vec{l}$ と $\vec{m}$ は 1 次独立なので，$ps - qr \neq 0$ である．題意より，$A\vec{l} = \vec{l}$，$A\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{m}$ であるから，

$$A\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \frac{1}{2}r \\ q & \frac{1}{2}s \end{pmatrix}$$

$ps-qr \neq 0$ であるから，$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するので，

$$A=\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} p & \frac{1}{2}r \\ q & \frac{1}{2}s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}=\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} ps-\frac{1}{2}qr & -pr+\frac{1}{2}rp \\ qs-\frac{1}{2}qs & -qr+\frac{1}{2}sp \end{pmatrix}$$

よって，(1) より，

$$T=\frac{1}{ps-qr}\left(ps-\frac{1}{2}qr-qr+\frac{1}{2}sp\right)=\frac{\frac{3}{2}(ps-qr)}{ps-qr}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◊ ♡

解説

条件をみたす $\vec{p},\vec{q}$ をどのように設定するかがポイントになります．$\vec{p}=(a,\,b),\vec{q}=(-b,\,a)$ とおけば，直交条件は常にみたしますが，大きさの条件をみたさないため $a^2+b^2=1$ という条件式を付け加えなければならなくなり条件式が増えてしまいます．そこで，変数を θ だけで表現できる三角関数を用いることが本問では適しています．このように，自分で設定しなければならない問題は経験を積んでおく必要があるので，類題演習を通して慣れておきましょう．