11 （'06　和歌山大） **【難易度】** … 標準

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．

【テーマ】：加法定理の応用

方針

加法定理と和積の公式をうまく活用します．

♣ ♠

解答

$$\begin{cases} \cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots① \\ \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とする．① と ② において，両辺を 2 乗すると，

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}$$

辺々加えて，

$$1+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$$
$$2+2\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{36} \iff \boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

次に，① と ② において，和積の公式を用いると，

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots③$$
$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots④$$

であるから，$\dfrac{④}{③}$ を計算することにより，

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \iff \tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{3}$$

を得る．ここで，$\alpha+\beta=\theta$ とおくと，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{3}$ であり，このとき $\cos\theta$ を求めればよい．

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+\frac{4}{9}}=\frac{9}{13}$$

となるので，半角の公式から

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2} \iff \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\cdot\frac{9}{13}-1=\frac{5}{13}$$

を得る．ゆえに，$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}}$……(**答**)

♢ ♡

解説

$\cos(\alpha-\beta)$ の方は，加法定理から簡単に導けますが，$\cos(\alpha+\beta)$ の方で苦労するかもしれません．与えられた条件から $\alpha+\beta$ の形を出すにはどの公式を利用するかを考える必要があります．そのためには，三角関数で学んだ公

式がすべて頭に入っていなければいけません．

後半では，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値から $\cos\theta$ の値を求めましたが，実は有名な式変形で入試でもしばしば取りあげられるので，まとめておきましょう．

$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき，$\sin\theta, \cos\theta$ を t を用いて表すと次のようになる．

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

θ の範囲を $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ のように設定しているのは，t がすべての実数をとれるようにするためです．この結果は，暗記しておくとよいでしょう．念のため，証明を付けておきます．この証明もできるようになっておいてください．

【証明】

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{1+t^2}$ であり，$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$ であることから，

$$\cos\theta=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

を得る．さらに，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

よって，示された． **（証明終）**

この証明で気を付けて欲しいところは，$\sin\theta$ の値を求める際に，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いないという点です．この式を用いると，最後に平方根を取らなければならなくなり，$\sin\theta=\pm\dfrac{2t}{1+t^2}$ が出てきます．そうすると，一方が成り立たないことを言わなければならず面倒になります．ここは，2 倍角の公式を利用してスマートに求めたいところです．この証明は式をメインに扱いましたが，座標平面上で単位円を使っても行うことができます．各自で考えてみてください．