

10 ('99 新潟大)【難易度】… |難|

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める. ここで, e は自然対数の底である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ.
- (2) 自然数 n に対して, $a_n = b_n e + c_n$ となる整数 b_n, c_n があることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ.