**8** （'02　岡山大） **【難易度】** … 標準

$k$ を自然数の定数とする．自然数 $n$ に対して，

$$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots\cdots + |n-k|$$

とおく．

（1） $S_n$ を求めよ．

（2） $S_n$ の最小値と，そのときの $n$ の値を求めよ．

**【テーマ】：絶対値を含む和**

方針

絶対値をはずすことを考えますが，$n$ と $k$ の大小関係が不明です．したがって，$n \geqq k$ と $n < k$ で場合分けを行います．

♣ ♠

**解答**

(1)

（ｉ） $1 \leqq n < k$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= \underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1}_{1\sim(n-1)\text{ までの自然数の和}} + 0 + \underbrace{1+2+\cdots\cdots+(k-n)}_{1\sim(k-n)\text{ までの自然数の和}} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}(k-n)(k-n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2-n+k^2-kn+k-nk+n^2-n) \\ &= \frac{1}{2}(2n^2-2kn-2n+k^2+k) \\ &= n^2-(k+1)n+\frac{1}{2}k(k+1) \end{aligned}$$

（ii） $k \leqq n$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= (n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+(n-k) \\ &= kn - \sum_{i=1}^{k} i \\ &= kn - \frac{1}{2}k(k+1) \\ &= \frac{k}{2}(2n-k-1) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} n^2-(k+1)n+\dfrac{1}{2}k(k+1) & (1 \leqq n < k) \\ \dfrac{k}{2}(2n-k-1) & (k \leqq n) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $n \geqq k$ のとき，$S_n$ は $n$ について 1 次式で $k$ が自然数であることから単調増加となるので，$n=k$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}k(k-1)$ をとる．

$1 \leqq n < k$ のとき，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{k^2+2k+1}{4}+\frac{k^2+k}{2}\\
&= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{-k^2-2k-1+2k^2+2k}{4}\\
&= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{k^2-1}{4}
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\begin{cases}
k\text{ が奇数のとき}\quad n=\dfrac{k+1}{2}\text{ で最小値 }\dfrac{k^2-1}{4}\\
k\text{ が偶数のとき}\quad n=\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k+2}{2}\text{ で最小値 }\dfrac{k^2}{4}
\end{cases}
$$

をとる．

ここで，$\dfrac{k^2-k}{2}$ と $\dfrac{k^2-1}{4}$ または $\dfrac{k^2}{4}$ の大小関係を調べる．

$$
\frac{k^2-k}{2}-\frac{k^2-1}{4}=\frac{2k^2-2k-k^2+1}{4}=\frac{k^2-2k+1}{4}=\frac{(k-1)^2}{4}\geqq 0
$$

$$
\frac{k^2-k}{2}-\frac{k^2}{4}=\frac{2k^2-2k-k^2}{4}=\frac{k^2-2k}{4}=\frac{k(k-2)}{4}\geqq 0\quad (\because\quad k\geqq 2)
$$

よって，いずれにしても $\dfrac{k^2-k}{2}$ より $\dfrac{k^2-1}{4}$ または $\dfrac{k^2}{4}$ の方が小さいので，求める $S_n$ の最小値は，

$$
\boldsymbol{\begin{cases}
k\text{ が奇数のとき}\quad n=\dfrac{k+1}{2}\text{ で最小値 }\dfrac{k^2-1}{4}\\
k\text{ が偶数のとき}\quad n=\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k+2}{2}\text{ で最小値 }\dfrac{k^2}{4}
\end{cases}}\quad\cdots\cdots\textbf{(答)}
$$

◇ ♡

**解説**

本問は，様々な大学で類題が出題されています．基本的な考え方は同じなので，この問題をしっかりと理解しておきましょう．

(1) は，絶対値をはずす作業から始めますが，$n$ と $k$ の関係がまったく書かれていないのでその大小関係が不明です．不明ということは場合分けをしなくてはいけないということになります．(ｉ) の場合は，$k$ 個の絶対値内がすべて正になる場合を考えていて，(ii) の場合は，$k$ 個の絶対値内のどこかで符号が入れ替わる場合を考えています．したがって，(ii) では，途中で 0 となる項が出てきて，その前後では $1+2+\cdots$ という計算になる点に注意を払わなければいけません．答えの形も (2) を想定して $n$ について整理しておくとよいでしょう．

(2) では，最小値を考えますが，$n\geqq k$ のときは，$n$ に関する 1 次関数でその係数が正であることから単調増加していることがわかります．したがって，この区間で最小となるのは，$n=k$ のときとなります．次に，$1\leqq n<k$ のときは，(1) から $S_n$ は $n$ に関する 2 次関数となっているので，平方完成をすることで，最小値を求めることができます．ただし，$n$ は自然数であることから頂点で必ず最小値を取るとは限らない点に注意が必要です．例えば，$k=4$ なら頂点の座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{15}{4}\right)$ となるので，$n=\dfrac{5}{2}$ で最小値をとるなんてことはありえません．したがって，$k$ の偶奇で場合分けが必要になるのです．最後に，$n\geqq k$ のときと $1\leqq n<k$ のときを比べて小さい方が $S_n$ の最小値となります．