6 （'05　日本大・改） 【難易度】… 標準

実数 a に対し，角 θ の方程式

$$\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+\frac{3}{2}=a \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき，x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　① を x で表せ．

(3)　① がただ一つの実数解をもつための a の値を求め，そのときの解 θ も求めよ．

【テーマ】：三角方程式の実数解の個数

方針

誘導がついているので，それにしたがえば方針は立てやすいでしょう．ポイントは，x の値 1 つに対して θ の値が 1 つとは限らないところです．x と θ の対応をきちんと調べておくことが必要です．

♣　♠

解答

(1)　$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ であることから，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$$

となる．したがって，

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1 \iff -\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

となるので，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}$……(**答**)

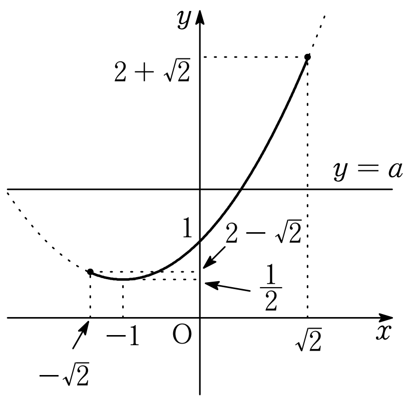
(2)　$x^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{x^2-1}{2}$ である．よって，① 式は次のようになる．

$$\frac{x^2-1}{2}+x+\frac{3}{2}=a \iff \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2+x+1=a}$$……(**答**)

(3)　$\frac{1}{2}x^2+x+1=a$ ……② とする．(2) より，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$ $(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$ とおくと，② の実数解の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの交点の個数と一致する．

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^2+2x)+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$$ であるから，頂点の座標は $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ である．

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．



ここで，$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であることから，x の値 1 つに対して，

$x\neq\pm\sqrt{2}$ のときは，θ の値は 2 つ決まる．

$x=\pm\sqrt{2}$ のときは，θ の値は 1 つ決まる．

よって，① がただ一つの実数解をもつためには，$x=\pm\sqrt{2}$ でなければならないが，グラフより $a=2-\sqrt{2}$ となるときは，$x=-\sqrt{2}$ 以外の解が存在するので，この場合は題意を満たさず不適．

よって，$a=2+\sqrt{2}$ のときのみが，題意を満たすので，このとき，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1 \text{ より，} \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，求める a の値は，$\boldsymbol{a=2+\sqrt{2}}$ であり，このとき，$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

x と θ の対応関係がしっかりと把握できれば，2 次関数の解の配置問題となります．② の式では，定数分離法と呼ばれる方法を使っています．これは，定数 a を含む式（右辺）と含まない式（左辺）に分ける方法です．したがって，x^2 の係数が分数になってもそのままにしておきます．

$a=2-\sqrt{2}$ となるときは，グラフから $x=-\sqrt{2}$ 以外に $x=\sqrt{2}-2$（$x=-1$ に関する対称性を利用して求めると簡単です）で $y=f(x)$ と $y=a$ は交点をもちます．このことから，① の解を分類すると，次のようになります．

$$\begin{cases} a<\dfrac{1}{2},\ 2+\sqrt{2}<a \text{ のとき，} & 0\text{ 個} \\ a=2+\sqrt{2} \text{ のとき，} & 1\text{ 個} \\ a=\dfrac{1}{2},\ 2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2} \text{ のとき，} & 2\text{ 個} \\ a=2-\sqrt{2} \text{ のとき，} & 3\text{ 個} \\ \dfrac{1}{2}<a<2-\sqrt{2} \text{ のとき，} & 4\text{ 個} \end{cases}$$

このように，1 つの問題に対して，解くだけではなくそこから問題をさらに広げて考えることをして，力をつけていきましょう．