5 （静岡薬科大） **【難易度】** … 標準

$0 \leqq x \leqq \pi$，$k > \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = k\sin 2x$ とで囲まれる 2 つの部分の面積の比が $1:2$ となるように定数 k の値を定めよ．

【テーマ】：交点が求められない２曲線で囲まれる面積

方針

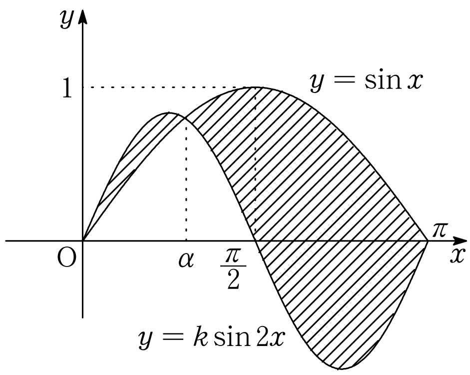
$y = \sin x$ と $y = k\sin 2x$ の $0 < x < \pi$ での交点は求めることができないので，文字を用いて表します．

♣ ♠

解答

$y = \sin x$ と $y = k\sin 2x$ の $0 < x < \pi$ での交点の x 座標を α とすると，

$$\sin\alpha = k\sin 2\alpha \iff \sin\alpha = 2k\sin\alpha\cos\alpha$$



$\sin\alpha \neq 0$ より，$1 = 2k\cos\alpha$ であるから，$\cos\alpha = \dfrac{1}{2k}$ を得る．

ここで，$k > \dfrac{1}{2}$ より，$\cos\alpha > 0$ よって，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ である．

ゆえに，

$$0 \leqq x \leqq \alpha \text{ のとき}\quad k\sin 2x \geqq \sin x$$

$$\alpha \leqq x \leqq \pi \text{ のとき}\quad k\sin 2x \leqq \sin x$$

であるから，

$$1:2 = \int_0^{\alpha}(k\sin 2x - \sin x)\,dx \ :\ \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - k\sin 2x)\,dx$$

$$2\int_0^{\alpha}(k\sin 2x - \sin x)\,dx = \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - k\sin 2x)\,dx$$

$$2\left[\frac{k}{2}(-\cos 2x) + \cos x\right]_0^{\alpha} = \left[-\cos x + \frac{k}{2}\cos 2x\right]_{\alpha}^{\pi}$$

$$-k\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + k - 2 = 1 + \frac{k}{2} + \cos\alpha - \frac{k}{2}\cos 2\alpha$$

$$-\frac{k}{2}\cos 2\alpha + \cos\alpha + \frac{k}{2} - 3 = 0$$

$$-k\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + k - 6 = 0$$

$$-k(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos\alpha + k - 6 = 0$$

$$-k\left(2\cdot\frac{1}{4k^2} - 1\right) + 2\cdot\frac{1}{2k} + k - 6 = 0 \qquad \left(\because\ \cos\alpha = \frac{1}{2k}\right)$$

$$-\frac{1}{2k} + k + \frac{1}{k} + k - 6 = 0 \iff 4k^2 - 12k + 1 = 0 \quad \therefore\ k = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$k > \dfrac{1}{2}$ であるから，$\boldsymbol{k = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2}}$……**(答)**

♢ ♡

解説

交点の x 座標が求まらないときは，文字で代用するというのは非常に大切な手法です．様々なところで活用できるので，必ず理解しておきましょう．