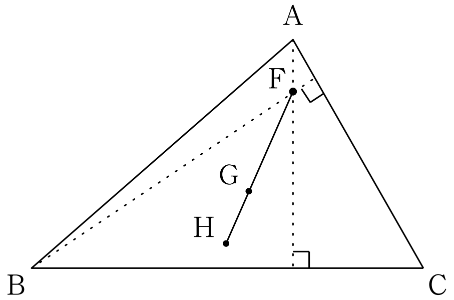
42 （'07　徳島大） 【難易度】 … 標準

$\triangle$ABC において，AC $=1$, BC $=k$, $\angle$C $=60^\circ$ とする．ただし，k は $\frac{1}{2}<k<2,\ k\neq 1$ を満たす実数である．A から辺 BC へ下ろした垂線と B から辺 AC へ下ろした垂線の交点を F とする．また，G を $\triangle$ABC の重心とする．$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とするとき，m,n を k を用いて表せ．

(3) 2 点 F, G を通る直線上に点 H をとり，G が線分 FH を 2 : 1 に内分する点となるように H を定める．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ および k を用いて表せ．

(4) (3) で定めた H が $\triangle$ABC の外心であることを示せ．

【テーマ】：ベクトルと図形

方針

様々な条件が与えられているので，何をどのように使うのかを整理しなければいけません．ほとんど計算だけで処理ができるので，計算ミスは致命傷になります．外心であることを示すためには，AH $=$ BH $=$ CH を示せばよいことに気付く必要があります．

♣ ♠

解答

(1) 点 G は $\triangle$ABC の重心であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{3}=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(m-1)\vec{a}+n\vec{b}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ であることから，

$$\vec{b}\cdot\{(m-1)\vec{a}+n\vec{b}\}=0 \iff (m-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+n|\vec{b}|^2=0\cdots\cdots①$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot k\cdot\cos 60^\circ=\frac{k}{2},\ |\vec{b}|^2=k^2$ より ① は，

$$\frac{k}{2}(m-1)+nk^2=0 \iff m-1+2nk=0 \quad (\because\ k\neq 0)\cdots\cdots②$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}=m\vec{a}+(n-1)\vec{b}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ であることから，

$$\vec{a}\cdot\{m\vec{a}+(n-1)\vec{b}\}=0 \iff m|\vec{a}|^2+(n-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0\cdots\cdots③$$

$|\vec{a}|^2=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{k}{2}$ より ③ は，

$$m+(n-1)\cdot\frac{k}{2}=0 \iff 2m+k(n-1)=0\cdots\cdots④$$

④ より，$m=-\frac{k(n-1)}{2}$ であるから，② へ代入して，

$$-\frac{k(n-1)}{2}-1+2nk=0 \iff n=\frac{2-k}{3k}$$

よって，このとき，$m=-\frac{k\left(\frac{2-k}{3k}-1\right)}{2}=\frac{2k-1}{3}$ となるので，

$$\boldsymbol{m=\frac{2k-1}{3},\quad n=\frac{2-k}{3k}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) FG : GH = 2 : 1 であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{CH}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}}}{3} \iff \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{CG}} - \overrightarrow{\mathrm{CF}}}{2}$$

ここで,

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{CF}} = \frac{2k-1}{3}\vec{a} + \frac{2-k}{3k}\vec{b}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\vec{a}+\vec{b}\right) - \left(\frac{2k-1}{3}\vec{a} + \frac{2-k}{3k}\vec{b}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4-2k}{3}\vec{a} + \frac{4k-2}{3k}\vec{b}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{2-k}{3}\vec{a} + \frac{2k-1}{3k}\vec{b}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(4) **【証明】**

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2 &= \left|\frac{2-k}{3}\vec{a} + \frac{2k-1}{3k}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{(2-k)^2}{9}\left|\vec{a}\right|^2 + 2\cdot\frac{(2-k)(2k-1)}{9k}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{(2k-1)^2}{9k^2}\left|\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{4-4k+k^2}{9} + \frac{-2k^2+5k-2}{9} + \frac{4k^2-4k+1}{9} \\ &= \frac{k^2-k+1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2 \\ &= \left|\frac{2-k}{3}\vec{a} + \frac{-k-1}{3k}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{4-4k+k^2}{9} + \frac{k^2-k-2}{9} + \frac{k^2+2k+1}{9} \\ &= \frac{k^2-k+1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2 \\ &= \left|\frac{-1-k}{3}\vec{a} + \frac{2k-1}{3k}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{k^2+2k+1}{9} + \frac{-2k^2-k+1}{9} + \frac{4k^2-4k+1}{9} \\ &= \frac{k^2-k+1}{3}\end{aligned}$$

よって, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2$ が成り立ち, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| > 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right| > 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| > 0$ より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|$$

が成り立つ. ゆえに, 点 H は △ABC の外心であることが示された. **【証明終】**

◇ ♡

解説

点 F, G は, それぞれ △ABC の垂心, 重心であることを用いて, 点 H が △ABC の外心であることを示す問題です. 垂心は各頂点から対辺に垂線を下ろしたときに交わる点なので, 垂直という条件を利用して解答するのだろうと気付く必要があります. 垂直とくれば内積 = 0 は受験生の常識ですから絶対にできるようになっておきたい問題です. 計算力が必要なので, 短時間で要領よく正確に計算する能力も求められています.