40 （'07 大阪教育大） 【難易度】 … |標準|

関数 $f(x)$ を次のようにおく．

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}-3}{e^{2x}+e^{-2x}-6e^x-6e^{-x}+12}$$

(1) $t=e^x+e^{-x}-3$ とする．$f(x)$ を t の式で表せ．

(2) x は実数全体を動くとする．$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 実数 a に対して $f(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ．

【テーマ】：方程式の実数解の個数

方針

置き換えをしたら新しい変数の範囲を忘れずに求める必要があります．また，(3) では，$y=g(t)$ のグラフをきちんとかいて考える必要があることと，t と x の実数解の個数の対応を考える必要があります．

♣ ♠

解答

(1) $t=e^x+e^{-x}-3$ より，両辺を 2 乗すると，

$$\begin{aligned} t^2 &= (e^x+e^{-x}-3)^2 \\ &= e^{2x}+e^{-2x}+9+2e^x\cdot e^{-x}-6e^{-x}-6e^x \\ &= e^{2x}+e^{-2x}-6e^x-6e^{-x}+11 \end{aligned}$$

また，$e^x>0,\ e^{-x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$e^x+e^{-x}\geqq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$$

等号は，$e^x=e^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき，成立する．よって，$e^x+e^{-x}-3\geqq -1$ となることから，

$$f(x)=\boldsymbol{\frac{t}{t^2+1}}\ \ \boldsymbol{(t\geqq -1)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $g(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ とおくと，$t\geqq -1$ での $y=g(t)$ の最大値・最小値を求めればよい．

$$g'(t)=\frac{t^2+1-t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

となるので，$g'(t)=0$ のとき，$t=\pm1$ である．よって，増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	(0)

$$g(-1)=-\frac{1}{2},\quad g(1)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=0$$

ここで，$t=1$ のとき，

$$e^x+e^{-x}-3=1 \iff e^{2x}-4e^x+1=0 \iff e^x=2\pm\sqrt{3} \qquad \therefore\ \ x=\log(2\pm\sqrt{3})$$

であり，$t=-1$ のとき，

$$e^x+e^{-x}-3=-1 \iff e^{2x}-2e^x+1=0 \iff (e^x-1)^2=0 \qquad \therefore\ \ x=0$$

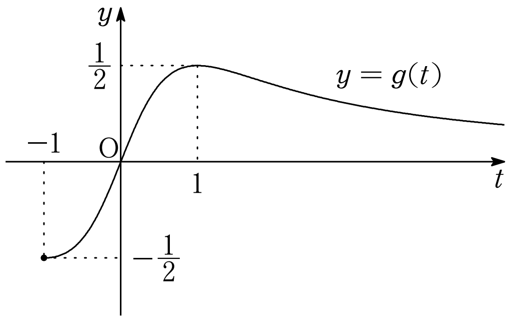
となるので，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \dfrac{1}{2} \quad (x = \log(2 \pm \sqrt{3})) \\ \textbf{最小値} \quad -\dfrac{1}{2} \quad (x = 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) の増減表より，$y = g(t)$ のグラフは右図のようになる．

また，$t = e^x + e^{-x} - 3$ より，$\dfrac{dt}{dx} = e^x - e^{-x}$ であるから，

$$\begin{cases} x < 0 \text{ のとき} \quad \dfrac{dt}{dx} < 0 \\ x \geqq 0 \text{ のとき} \quad \dfrac{dt}{dx} \geqq 0 \end{cases}$$

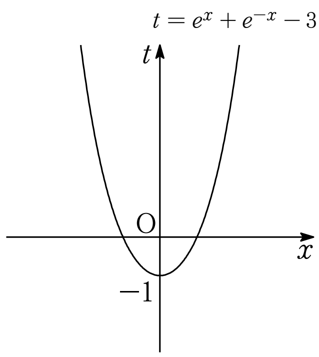


となる．さらに，

$$\lim_{x \to \pm\infty} (e^x + e^{-x} - 3) = +\infty$$

であるから，

$$\begin{cases} t = -1 \text{ のとき} \quad x = 0 \text{ の 1 つのみ} \\ t > -1 \text{ のとき} \quad t \text{ の値 1 つに対して } x \text{ の値は 2 つある} \end{cases}$$



ゆえに，$y = g(t)$ と $y = a$ のグラフの交点の個数と，上記のことを合わせて $f(x) = a$ の実数解の個数を分類すると，次のようになる．

$$\begin{cases} a < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} < a \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \\ a = -\dfrac{1}{2} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ -\dfrac{1}{2} < a \leqq 0,\ a = \dfrac{1}{2} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ 0 < a < \dfrac{1}{2} \textbf{ のとき} & \textbf{4 個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

置き換えをして実数解の個数を求める問題では，次の点に注意が必要になります．

- 新しく置き換えた文字の範囲を求める．
- 元の文字と新しく置き換えた文字の実数値の対応を考える．

このことから，(3) では，$t = e^x + e^{-x} - 3$ のグラフの概形を知る必要があったのです．したがって，t を x で微分してグラフの状況をつかみました．ここで，$\lim_{x \to \pm\infty} (e^x + e^{-x} - 3)$ が何故必要なのかわかりますか？これは，x の値が大きくなったとき，t がある値に収束してしまうと $t \geqq -1$ で t の値 1 つに対して x の値が 2 つ対応するとは限らなくなってしまうからです．このような議論をきちんと行った上で実数解の個数を分類する必要があります．もちろん増減表をきちんとかいていれば問題ありません．

ちなみに，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになります．