38 （′01　早稲田大） 【難易度】 … 標準

座標空間における 3 点 A(4, −1, 2), B(2, 2, 3), C(5, −4, 0) を頂点とする三角形の外心の座標を求めよ.

【テーマ】：外心の座標

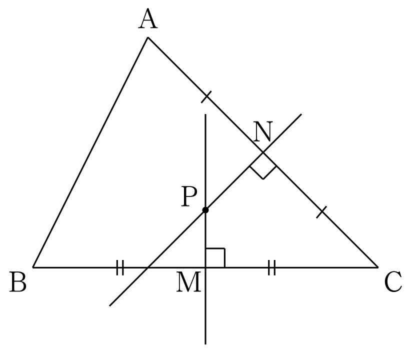
方針

外心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点です．外心の座標を $(x,\ y,\ z)$ として，内積を利用して計算します．

♣ ♠

解答

外心を P, BC, AC の中点をそれぞれ M, N とすると,



$$\mathrm{PM} \perp \mathrm{BC} \text{ かつ } \mathrm{PN} \perp \mathrm{AC}$$

である．ここで，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 & \cdots\cdots① \\ \overrightarrow{\mathrm{PN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

また，P は 3 点 A, B, C と同一平面上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots\cdots③$$

とおくことができる．$\mathrm{M}\left(\frac{7}{2},\ -1,\ \frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{N}\left(\frac{9}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \left(\frac{7}{2} - x,\ -1 - y,\ \frac{3}{2} - z\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{PN}} = \left(\frac{9}{2} - x,\ -\frac{5}{2} - y,\ 1 - z\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3,\ -6,\ -3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ -3,\ -2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 3,\ 1)$$

よって，① より,

$$3\left(\frac{7}{2} - x\right) - 6(-1 - y) - 3\left(\frac{3}{2} - z\right) = 0 \iff x - 2y - z = 4 \cdots\cdots④$$

また，② より,

$$\frac{9}{2} - x - 3\left(-\frac{5}{2} - y\right) - 2(1 - z) = 0 \iff x - 3y - 2z = 10 \cdots\cdots⑤$$

③ より,

$$(x - 4,\ y + 1,\ z - 2) = s(-2,\ 3,\ 1) + t(1,\ -3,\ -2)$$

$$\iff \begin{cases} x - 4 = -2s + t \\ y + 1 = 3s - 3t \\ z - 2 = s - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2s + t + 4 \\ y = 3s - 3t - 1 \\ z = s - 2t + 2 \end{cases} \cdots\cdots(*)$$

これを ④, ⑤ へ代入して,

$$④ \iff -2s + t + 4 - 2(3s - 3t - 1) - (s - 2t + 2) = 4 \iff s = t$$

$$⑤ \iff -2s + t + 4 - 3(3s - 3t - 1) - 2(s - 2t + 2) = 10 \iff 13s - 14t + 7 = 0$$

これより，$s = 7,\ t = 7$ を得る．よって，$(*)$ より $x = -3,\ y = -1,\ z = -5$ となるので，外心の座標は,

$(-3,\ -1,\ -5)$……(答)

◇ ♡

解説

三角形の外心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点になります．ただし，3 本の垂直二等分線は，必ず 1 点で交わるため，2 本を考えれば十分です．あとは，内積の計算を地道にするだけで答えを得ることができます．基本的な計算なので，計算間違いのないように十分注意しましょう．