34 ('04 広島大) 【難易度】… 標準

次の問いに答えよ．

(1) 点 $(3, 3)$ における円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ の接線の方程式を求めよ．

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y \\ \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5 \end{cases}$$

(3) a を正の数とする．点 (x, y) が (2) で求めた領域を動くとき，$ax+y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ．

【テーマ】：領域と最大・最小

方針

対数を見かけたらまずは，底の条件と真数条件を調べましょう．本問では，底に文字が含まれていないので真数条件のみを調べれば十分です．その条件のもとで図示する必要があります．(1) がヒントになっているので，どのように利用するかをよく考えてみましょう．

♣ ♠

解答

(1) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ より，点 $(3, 3)$ における接線の方程式は，

$$(3-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5 \iff \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(2) 真数条件より，

$$2x-3>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } x^2+y^2-4x-2y+5>0$$

すなわち

$$x>\frac{3}{2},\ y>0,\ (x-2)^2+(y-1)^2>0$$

よって，$x>\dfrac{3}{2},\ y>0,\ x \neq 2$ かつ $y \neq 1 \cdots$ ①

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y$ において，底は $\dfrac{1}{2}$ で 1 より小さいので，

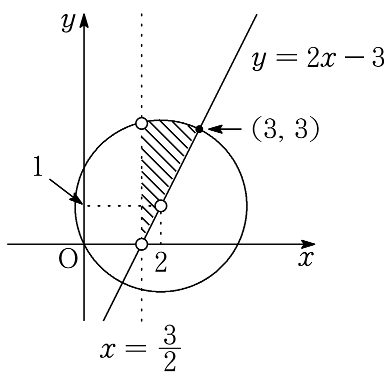
$$y \geqq 2x-3 \cdots ②$$

$\log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$ において，底は 2 で 1 より大きいので，

$$x^2+y^2-4x-2y+5 \leqq 5$$

$$\iff (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq 5$$

よって，求める領域は右図の斜線部分で $x=\dfrac{3}{2}$ 上の点と点 $(2, 1)$ を除く．



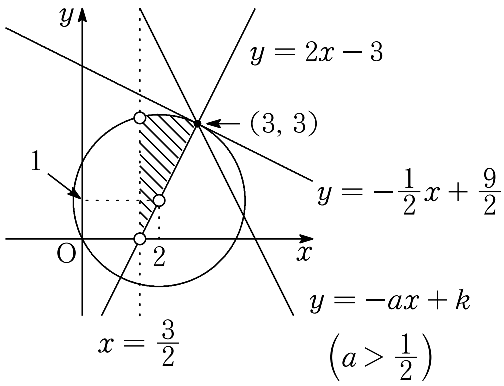
(3)　$ax + y = k$ とおくと，$y = -ax + k$ となる．

（ｉ）(1) から，$-a < -\frac{1}{2}$ すなわち $a > \frac{1}{2}$ のとき，

$x = y = 3$ で k は最大となり，このとき，

$$k = 3a + 3 = 4 \iff a = \frac{1}{3}$$

これは $a > \frac{1}{2}$ に反するので不適.



（ii）$0 < a < \frac{1}{2}$ のとき，

(2) で求めた領域の円弧の部分で $y = -ax + k$ が接するとき k は最大となる．このとき，円の中心と直線までの距離が円の半径に等しくなるので，

$$\frac{|-2a - 1 + k|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

であり，$k = 4$ を代入すると，

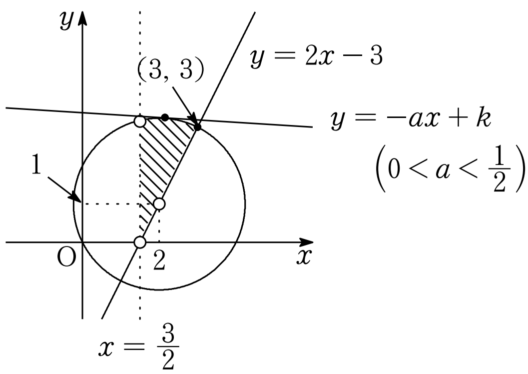
$$\frac{|-2a - 1 + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\iff \quad |-2a + 3| = \sqrt{5(a^2 + 1)}$$

両辺 2 乗して，整理すると，

$$4a^2 - 12a + 9 = 5a^2 + 5$$

$$\iff \quad a^2 + 12a - 4 = 0 \qquad \therefore \quad a = -6 \pm 2\sqrt{10}$$



$0 < a < \frac{1}{2}$ より，$a = -6 + 2\sqrt{10}$ である．

ゆえに，（ｉ），（ii）より，求める a の値は，$\boldsymbol{a = -6 + 2\sqrt{10}}$……**(答)**

◇ ♡

解説

領域図示と領域内の (x, y) に対する式の値の最大値を求める典型的な問題です．$ax + y = k$ とおいて，この式を直線とみなし，切片 k の値が最大になる場合を考えます．このとき，傾きに文字を含むので場合分けが必要であることを理解しましょう．また，(1) でヒントが与えられているので，比較的解答がスムーズに作成できます．