30 （'06　東京大）　**【難易度】** … 標準

四角形 ABCD が，半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ．

【テーマ】：平面図形の計量

方針

何を未知数に置けばよいのかをよく考えて，正弦定理・余弦定理を活用します．いろいろな解法が考えられます．

♣ ♠

解答

AB $= x$ とすると，

$$\mathrm{AD} = 44 - 26 - x = 18 - x$$

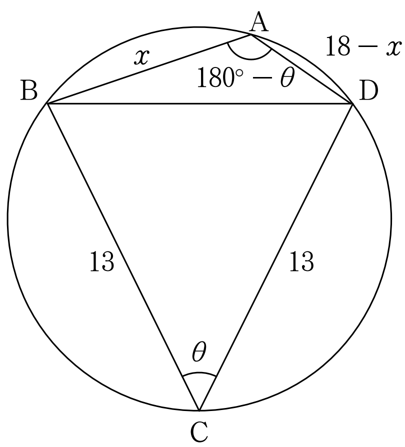
$\angle\mathrm{BCD} = \theta$ とすると，$\triangle$BCD で余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{13^2 + 13^2 - \mathrm{BD}^2}{2\cdot 13\cdot 13} = \frac{2\cdot 13^2 - \mathrm{BD}^2}{2\cdot 13^2} \cdots\cdots ①$$

また，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\theta} = 2\cdot\frac{65}{8} \qquad \therefore\ \mathrm{BD} = \frac{65}{4}\sin\theta \cdots\cdots ②$$

① へ ② を代入して，



$$\cos\theta = \frac{2\cdot 13^2 - \frac{65^2}{16}\sin^2\theta}{2\cdot 13^2}$$

$$2\cdot 13^2\cos\theta = 2\cdot 13^2 - \frac{65^2}{16}(1 - \cos^2\theta)$$

$$32\cdot 13^2\cos\theta = 32\cdot 13^2 - 65^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$32\cos\theta = 32 - 25(1 - \cos^2\theta)$$

$$25\cos^2\theta - 32\cos\theta + 7 = 0$$

$$(25\cos\theta - 7)(\cos\theta - 1) = 0$$

$\cos\theta \neq 1$ であるから，$\cos\theta = \frac{7}{25}$

よって，

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{25^2 - 7^2}{25^2}} = \frac{\sqrt{(25-7)(25+7)}}{25} = \frac{\sqrt{18\cdot 32}}{25} = \frac{24}{25}$$

ゆえに，② から，BD $= \frac{65}{4}\cdot\frac{24}{25} = \frac{78}{5}$ となる．$\triangle$ABD で余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2 = x^2 + (18 - x)^2 - 2x(18 - x)\cdot\cos(180^\circ - \theta)$$

$$\frac{78^2}{25} = x^2 + 18^2 - 36x + x^2 + 2x(18 - x)\cos\theta \qquad (\because\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta)$$

$$78^2 = 50x^2 - 36\cdot 25x + 18^2\cdot 25 + 50x(18 - x)\cdot\frac{7}{25}$$

$$78^2 = 50x^2 - 36\cdot 25x + 18^2\cdot 25 + 14x(18 - x)$$

$$36x^2 - 648x + 2016 = 0$$

$$x^2-18x+56=0$$

$$(x-4)(x-14)=0 \qquad \therefore \quad x=4,\ 14$$

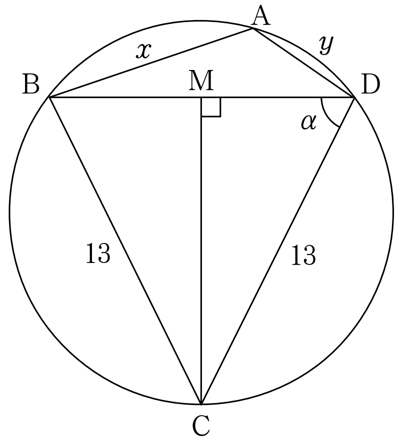
ゆえに，AB, DA の長さは，**(AB, DA) = (4, 14), (14, 4)**……(**答**)

別解

$\angle\mathrm{BDC}=\alpha$ とおく．$\triangle\mathrm{BCD}$ より，正弦定理から，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\alpha}=2\cdot\frac{65}{8} \iff \sin\alpha=\frac{13}{\frac{65}{4}} \iff \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

となる．辺 BD の中点を M とすると，$\triangle\mathrm{BCD}$ が BC = DC の二等辺三角形であることから，$\angle\mathrm{CMD}=90^\circ$ となるので，$\triangle\mathrm{CMD}$ において，三角比の定義から，



$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{CD}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}{13}=\frac{\mathrm{BD}}{26}$$

となる．ここで，

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

より，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$ となるので，

$$\mathrm{BD}=26\cos\alpha=\frac{78}{5}$$

を得る．

また，$\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{AD}=y$ とおくと，周の長さが 44 であることから，

$$x+y=18 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．さらに，円周角の定理より，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BDC}+\angle\mathrm{DBC}=2\alpha$ が成り立つので，

$$\cos\angle\mathrm{BAD}=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$$

よって，$\triangle\mathrm{ABD}$ で余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=x^2+y^2-2xy\cdot\cos\angle\mathrm{BAD} \iff \frac{78^2}{25}=(x+y)^2-2xy-2xy\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)$$

$$\iff 78^2=25\cdot 18^2-50xy+14xy \qquad \iff 36xy=90^2-78^2$$

$$\iff 36xy=12\cdot 168 \qquad \iff xy=56 \cdots\cdots ②$$

よって，①, ② より，x, y を 2 解にもつ 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$t^2-18t+56=0 \iff (t-14)(t-4)=0 \qquad \therefore \quad t=4,\ 14$$

ゆえに，AB, DA の長さは，**(AB, DA) = (4, 14), (14, 4)**……(**答**)

◇ ♡

解説

与えられている情報が少ないので，自分でいくつかの変数を設定する必要があります．あとは，定理や公式を使って方程式を求め解くという作業をすることになりますが，本問の解答のように，計算の過程で数字が大きくなってしまう可能性もあります．このようなときは，むやみに計算せず掛け算の状態で放置しつつ計算するというのも計算のテクニックとして非常に重要です．このような計算ができるようになれば，計算力がつきますので，むやみに大きな数を計算するのはやめましょう．**別解** 中の余弦定理内の計算では，$90^2-78^2=(90-78)(90+78)=12\cdot 168$ のように数字で因数分解を利用して計算しています．大きな数字の計算では，このような計算テクニックも使えるようになっておく必要があります．