28 （'99　岡山大） 【難易度】 … 標準

a, b を実数とする．2 つの関数

$$f(x) = \log(x^2+1), \quad g(x) = ax^2 + b$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

(3)　(2) の条件において，$a = \dfrac{1}{4}, b \neq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

【テーマ】：共通接線と面積

方針

2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = t$ において接しているとき，その接点における共通接線を求めるためには，次の 2 つの条件が同時に成り立てばよいことを用います．

$$f(t) = g(t), \quad f'(t) = g'(t)$$

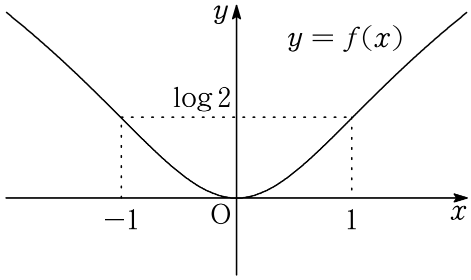
解答

(1)　$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ より，$f'(x) = 0$ となる x の値は，$x = 0$ である．また，

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

より，$f''(x) = 0$ となる x の値は，$x = \pm 1$ である．ここで，$y = f(x)$ は y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$ のグラフを考えればよく，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ となることから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\log 2$	↗	$(+\infty)$



よって，y 軸に関する対称性を考慮にいれると，$y = f(x)$ のグラフは，右上図のようになる．

(2)　$y = f(x), y = g(x)$ はともに y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$ で考える．$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x \geqq 0$ で接するときの接点の x 座標を t $(t \geqq 0)$ とおくと，

$$\begin{cases} f'(t) = g'(t) & \cdots\cdots ① \\ f(t) = g(t) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

をともにみたす 0 以上の実数 t を求めればよい．

① より，

$$\frac{2t}{t^2+1} = 2at \iff 2t = 2at(t^2+1) \iff t(at^2+a-1) = 0 \cdots\cdots ①'$$

② より，$\log(t^2+1) = at^2 + b \cdots\cdots ②$

①′ より，$t=0$ または，$t^2=\dfrac{1-a}{a}$ となる．

（ i ） $t=0$ のとき，a は任意の実数で，② より，$b=0$ である．

（ii） $t^2=\dfrac{1-a}{a}$ のとき，$t^2>0$ より，$\dfrac{1-a}{a}>0 \iff a(1-a)>0 \iff 0<a<1$ のとき，② から，

$$\log\left(\frac{1-a}{a}+1\right)=a\cdot\frac{1-a}{a}+b \iff b=a+\log\frac{1}{a}-1=a-\log a-1$$

以上より，求める a, b の条件は，

$b=0$ または，$b=a-\log a-1$ $(0<a<1)$……(答)

(3) (2) の条件下で，$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，

$$b=\frac{1}{4}-\log\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}+\log 4$$

このとき，接点の x 座標は，

$$t^2=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=3 \text{ より，} t=\sqrt{3}\ (\because\ t>0)$$

ゆえに，求める面積 S は，y 軸に関する対称性を考慮に入れると，

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\sqrt{3}}\{at^2+b-\log(t^2+1)\}\,dt \\
&= 2\left[\frac{1}{3}at^3+bt\right]_0^{\sqrt{3}}-2\int_0^{\sqrt{3}}\log(t^2+1)\,dt \\
&= 2(\sqrt{3}a+\sqrt{3}b)-2\left\{\left[t\log(t^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt\right\} \\
&= 2\sqrt{3}(a+b)-2\left(\sqrt{3}\log 4\right)+4\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\
&= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\log 4\right)-2\sqrt{3}\log 4+4\sqrt{3}-4\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= 3\sqrt{3}-4\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt
\end{aligned}$$

ここで，$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

t	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{3}$

よって，

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，$S=\boldsymbol{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}$……**(答)**

◇ ♡

解説

様々な要素が盛り込まれている問題で，微分積分の総合チェックにはもってこいです．(1) はグラフをかく基本的な問題ですが，対称性に気付けば増減表がコンパクトになります．また，$x\to\infty$ における $f(x)$ の極限を求めておくのを忘れないようにしましょう．(2) は，共通接線の問題です．(1) でグラフをかいているので，それをヒントにすれば接線がイメージしやすいでしょう．場合分けを伴うので，注意深く計算する必要があります．$\dfrac{1-a}{a}>0$ を変形する際には，両辺に a をかけてはいけません．これは，a が正か負かが不明だからです．こういうときは，両辺に $a^2>0$ をかけてやれば符号を心配する必要がなくなることを知っておきましょう．(3) は面積計算です．$\displaystyle\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt$ の積分は，$\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$ と変形し，置換積分法を用いて行います．