27 （’03　津田塾大） 【難易度】 … 標準

次の条件をみたす 4 桁の正の整数 $d_4d_3d_2d_1$ の個数をそれぞれの場合について求めよ．

（1） $9 \geqq d_4 > d_3 > d_2 > d_1 \geqq 0$

（2） $9 \geqq d_4 \geqq d_3 \geqq d_2 \geqq d_1 \geqq 0$

【テーマ】：4 桁の整数の個数

方針

(1) は, 異なる 4 つの数を選んでくることで, 大小関係が 1 通りに定まることを利用します. (2) では, $d_4 \geqq d_3$ などにある ＝（イコール）を取り除くことを考えましょう．イコールが取り除ければ, (1) と同じ考え方で解くことができます．ただし, $d_4 \neq 0$ であることに注意する必要があります.

解答

（1） 0〜9 の 10 個の中から異なる 4 個の数を選べば，大小関係は 1 通りに定まることから，大きい順に d_4, d_3, d_2, d_1 とすればよいので，求める個数は，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{210} \textbf{(個)} \cdots\cdots \textbf{(答)} $$

（2）
$$ 9 \geqq d_4 \geqq d_3 \geqq d_2 \geqq d_1 \geqq 0 \iff 12 \geqq d_4 + 3 > d_3 + 2 > d_2 + 1 > d_1 \geqq 0 $$

であり，$d_4 + 3 = D_4,\ d_3 + 2 = D_3,\ d_2 + 1 = D_2$ とおくと，

$$ 12 \geqq D_4 > D_3 > D_2 > d_1 \geqq 0 $$

となる．d_2, d_3, d_4 はそれぞれ D_2, D_3, D_4 と 1 対 1 に対応しているので，(1) と同様に考えればよい．

0〜12 の 13 個の中から異なる 4 個を選べばよいが，このうち $d_1 = 0,\ D_2 = 1,\ D_3 = 2,\ D_4 = 3$ のときは，$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$ となるので，条件をみたさない．ゆえに，求める場合の数は，

$$ {}_{13}\mathrm{C}_4 - 1 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 1 = 13 \cdot 55 - 1 = \mathbf{714} \textbf{(個)} \cdots\cdots \textbf{(答)} $$

解説

(1) では，4 つの数がすべて異なっているので，10 個の中から異なる 4 つの数を選んでくるだけで求めることができます．その際，$d_4 = 0$ となる心配がないので，最高位の数が 0 になる場合を考える必要はありません．

(2) では，4 つの数がすべて異なっている訳ではないので，真面目に場合分けをすると次のように 8 通りしなければいけません．

（i） $d_4 = d_3 = d_2 = d_1$　　（v） $d_4 > d_3 > d_2 = d_1$

（ii） $d_4 > d_3 = d_2 = d_1$　　（vi） $d_4 > d_3 = d_2 > d_1$

（iii） $d_4 = d_3 > d_2 = d_1$　　（vii） $d_4 = d_3 > d_2 > d_1$

（iv） $d_4 = d_3 = d_2 > d_1$　　（viii） $d_4 > d_3 > d_2 > d_1$

さすがにこれは大変です．そもそも面倒にしている原因は ＝（イコール）なのですから，これを取り去る方法を考えます．

$d_2 \geqq d_1$ が成り立っているということは，左辺に 1 を加えれば，

$$d_2+1>d_1 \quad \cdots\cdots①$$

となり，イコールが消えます．同様に，

$$d_4+1>d_3,\ d_3+1>d_2$$

も成り立ちます．これらを一つの不等式にするためには，前者の不等式の両辺に 2 を，後者の不等式の両辺に 1 を加えて，

$$d_4+3>d_3+2,\ d_3+2>d_2+1 \quad \cdots\cdots②$$

と変形する必要があります．こうすることで，①, ② において d_2+1, d_3+2 という部分で不等式を繋げることができるので，

$$12 \geqq d_4+3>d_3+2>d_2+1>d_1 \geqq 0$$

を得るというわけです．