

**26** (岡山県立大・改)

【難易度】…標準

$\alpha = 3 + \sqrt{7}$ ,  $\beta = 3 - \sqrt{7}$  とし,  $x_n = \alpha^n + \beta^n$  とおく.

- (1)  $x_{n+2}$  を  $x_{n+1}$  と  $x_n$  で表せ.  
 (2)  $n$  が 2 以上の整数とするととき,  $x_n$  は 4 の倍数であることを示せ.

【テーマ】: 数学的帰納法

**方針**

(1) では, 対称式の式変形を用いて  $\{x_n\}$  の漸化式を導きます.(2) は, (1) で導いた式を用いて数学的帰納法で証明をしますが, (1) で導いた式は隣接 3 項間漸化式なので, 2 つを仮定 ( $n = k, k + 1$  を仮定) する必要があります.

**解答**

(1)

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} \\ &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta \\ &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6 \\ \alpha\beta &= (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) = 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$x_{n+2} = 6(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - 2(\alpha^n + \beta^n) \iff x_{n+2} = 6x_{n+1} - 2x_n \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) 【証明】

(i)  $n = 2$  のとき,

$$x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 36 - 4 = 32$$

よって, 4 の倍数であるから,  $n = 2$  のとき成り立つ.

(ii)  $n = 3$  のとき,

$$x_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 6(36 - 6) = 180$$

よって, 4 の倍数であるから,  $n = 3$  のとき成り立つ.

(iii)  $n = k, k + 1$  ( $k \geq 2$ ) のとき,  $x_k, x_{k+1}$  が 4 の倍数であると仮定すると,

$$x_k = 4l, x_{k+1} = 4m \quad (l, m \text{ は自然数})$$

とかけて,

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= 6x_{k+1} - 2x_k \\ &= 6 \cdot 4m - 2 \cdot 4l \\ &= 4(6m - 2l) \end{aligned}$$

$6m - 2l$  は整数であるから,  $x_{k+2}$  は 4 の倍数である. ゆえに,  $n = k + 2$  のときも 4 の倍数である.

以上より,  $n \geq 2$  の自然数  $n$  に対して,  $x_n$  は 4 の倍数であることが示された.

【証明終】

---

◇

♡

解説

2 つ仮定する数学的帰納法の問題です. いくつ仮定すればよいかを考えるのは重要で, 本問のように隣接 3 項間漸化式であれば, 前 2 つが決まらなければ次が決まらないので 2 つの仮定が必要になります. したがって, 問題をよく読んで理解し, いくつ仮定すべきかを見抜く力を養っておきましょう. また, 本問は数学的帰納法の解法以外にも対称式の式変形の知識が必要になります. (1) では,  $\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}$  を  $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$  と  $\alpha^n + \beta^n$  で表せと言っているのので, まず展開したら  $\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}$  が出てくるように  $(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha + \beta)$  を作ります. あとは, 余分な項を引けばよいのです.