24 （'92　岡山理科大） 【難易度】 … 標準

a, b を実数とし，$P = a^4 - 4a^2b + b^2 + 3b$ とおく．

(1)　すべての b に対して $P \geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(2)　すべての a に対して $P \geqq 0$ となるような b の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：絶対不等式

方針

文字が 2 つあるので，どちらの文字を変数として考えるのかをはっきりさせる必要があります．その際，他の文字は定数という見方をします．

すべての b についてといわれたら，b を変数としてみなすとよいでしょう．その際，a は定数扱いです．よくわからないときは，$b = x$ と置き換えるとわかりやすいかもしれません．(2) は a, b の立場が (1) とは逆になります．このとき，a については 4 次式になるので，置き換えをするとよいでしょう．ただし，置き換えしたら新しい変数のとり得る値の範囲に注意が必要です．

♣　♠

解答

(1)　b について整理すると，

$$P = b^2 - (4a^2 - 3)b + a^4$$

となるので，すべての b に対して，$P \geqq 0$ となるためには，$P = 0$ の判別式を D_1 とすると，

$$\begin{aligned} D_1 &= (4a^2-3)^2 - 4a^4 \leqq 0 \\ &\quad 16a^4 - 24a^2 + 9 - 4a^4 \leqq 0 \\ &\quad 4a^4 - 8a^2 + 3 \leqq 0 \\ &\quad (2a^2-3)(2a^2-1) \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} \leqq a^2 \leqq \frac{3}{2} \iff \boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq a \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

(2)　a について整理すると，

$$P = a^4 - 4ba^2 + b^2 + 3b$$

となるので，$a^2 = x$ とおくと，$x \geqq 0$ であり，

$$P = x^2 - 4bx + b^2 + 3b$$

と変形することができる．よって，$x \geqq 0$ となるすべての x に対して，$P \geqq 0$ となるための b の値の範囲を求めればよい．

$$f(x) = x^2 - 4bx + b^2 + 3b = (x - 2b)^2 - 3b^2 + 3b$$

とおくと，

（ｉ）　$2b < 0$ かつ $f(0) \geqq 0$

　または

（ii）　$2b \geqq 0$ かつ $-3b^2 + 3b \geqq 0$

であればよい．（ｉ）より，

$$b<0 \text{ かつ } f(0)=b^2+3b \geqq 0 \iff b \leqq -3$$

（ii）より,

$$b \geqq 0 \text{ かつ } b^2-b \leqq 0 \iff 0 \leqq b \leqq 1$$

ゆえに，求める b の値の範囲は，

$\boldsymbol{b \leqq -3,\ 0 \leqq b \leqq 1}$……**(答)**

である．

解説

頻出の問題であるが，2 つの変数があると混乱してしまい，どのように考えてよいかわからないという人が多いのが現状です．しかし，どの文字を変数として考え，どの文字を定数として考えるかをはっきりさせることである程度方針が見えてくるでしょう．