21 （'08　宇都宮大） **【難易度】** … やや難

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$ であるとし，この数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $a_n=-2S_nS_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$ をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） a_2 と a_3 を求めよ．

（2） n が自然数であるとき，$0<S_n\leqq 1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

（3） a_n を求めよ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) は，与式に $n=2$ を代入し，$S_2=a_1+a_2$ を利用して，a_2 に関する 1 次方程式を作ります．a_3 も同様にします．(2) は指示通り数学的帰納法で証明しますが，不等式の評価をどのようにするかがポイントです．(3) は S_n に関する漸化式を立式して S_n を求めてから a_n を求めます．

♣ ♠

解答

（1） 与式に $n=2$ を代入して，

$$a_2=-2S_2S_1 \iff a_2=-2(a_1+a_2)a_1 \iff a_2=-2(1+a_2) \qquad (\because\ a_1=1)$$

よって，$3a_2=-2$　　$\therefore\ a_2=-\boldsymbol{\frac{2}{3}}$……(**答**)

同様に，$n=3$ を代入して，

$$\begin{aligned} a_3=-2S_3S_2 &\iff a_3=-2(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2) \\ &\iff a_3=-2\left(1-\frac{2}{3}+a_3\right)\left(1-\frac{2}{3}\right) \qquad \left(\because\ a_1=1,\ a_2=-\frac{2}{3}\right) \\ &\iff a_3=-\frac{2}{3}\left(a_3+\frac{1}{3}\right) \\ &\iff 3a_3=-2a_3-\frac{2}{3} \\ &\iff 5a_3=-\frac{2}{3} \qquad \therefore\ a_3=-\boldsymbol{\frac{2}{15}}\text{……(答)} \end{aligned}$$

（2） **【証明】**

$0<S_n\leqq 1$ ……① とする．

（ｉ） $n=1$ のとき，

$S_1=a_1=1$ より，① をみたす．

（ii） $n=k\ (k\geqq 1)$ のとき，① が成り立つと仮定する．すなわち，

$0<S_k\leqq 1$ ……②

ここで，和と一般項の関係および与えられた条件式から，

$$S_{k+1}-S_k=a_{k+1},\quad a_{k+1}=-2S_{k+1}S_k$$

が成り立つので，

$$S_{k+1}-S_k=-2S_{k+1}S_k \cdots\cdots ③$$

これを変形すると，

$$S_{k+1}(1+2S_k)=S_k$$

を得る．② から，$1+2S_k>1$ となるので，

$$S_{k+1}=\frac{S_k}{2S_k+1}>0$$

$$S_{k+1}=\frac{S_k}{2S_k+1}<\frac{S_k}{1}=S_k \leqq 1$$

ゆえに，$0<S_{k+1}\leqq 1$ が成り立つので，$n=k+1$ のときも，① は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して ① が成り立つことが示された． **【証明終】**

(3) ③ より，

$$S_{n+1}-S_n=-2S_{n+1}S_n$$

であり，$S_n>0$ より，両辺を $S_{n+1}S_n \neq 0$ で割ると，

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=-2 \iff \frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$$

よって，数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ は，初項 $\frac{1}{S_1}=1$，公差 2 の等差数列であるから，

$$\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\cdot 2 \iff S_n=\frac{1}{2n-1}$$

これを，$a_n=-2S_nS_{n-1}$ へ，$n\geqq 2$ という条件下で代入すると，

$$a_n=-2\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-3}=\frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}$$

この式において，$n=1$ のとき，$a_1=2$ となるので，$n=1$ のときは，みたさないことから，求める a_n は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1=1} & \boldsymbol{(n=1)} \\ \boldsymbol{a_n=\dfrac{-2}{(2n-1)(2n-3)}} & \boldsymbol{(n\geqq 2)} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

与えられた式は，和 S_n と一般項 a_n の式ですから，当然和と一般項の関係を思い出さなければいけません．

(1) は，$S_1=a_1$ であることや $S_2=a_1+a_2$ であることが理解できていれば，完答できる問題です．ここは，確実に得点しましょう．

(2) は，数学的帰納法で証明せよとあるので方針が立てやすくなっていますが，そのヒントが無くても自然数 n に関する不等式を示せと言われたら，数学的帰納法を思い出せるようにしておきましょう．③ 式からの式変形は，少々技巧的にみえるかもしれませんが，示すべきものが何かを考えれば $S_{n+1}=$ の形にすべきであることは必然的にわかります．

(3) は，S_n に関する漸化式を解けばよいのですが，ここは経験しているか否かで難易度に差がでる問題です．両辺を $S_{n+1}S_n\neq 0$ で割れば，等差数列型の漸化式に帰着するので，そこに気が付けば容易に a_n は求められます．しかし，最後に $n=1, n\geqq 2$ で a_n の式が違うので，分けて答えなければならない部分を理解しておきましょう．