17 【難易度】… 標準

平面上に四角形 ABCD がある．この平面上の任意の 2 点 P, Q に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QD}}$$

が成り立つとき，四角形 ABCD はどのような四角形か．

【テーマ】：ベクトルの表す図形

方針

始点を揃えて式を変形します．最後は，始点にこだわらず式を変形し，P, Q が平面上の任意の点であることを用います．

解答

始点を A にそろえると，

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})$$

$$\iff -\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

$$\iff (\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$$

P, Q は平面上の任意の点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}\qquad\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

ゆえに，**四角形 ABCD は平行四辺形である．**……(答)

解説

この問題のポイントは，2 つあります．一つ目は，始点を A にそろえて式を変形していく点です．二つ目は，最後のところで，2 点 P, Q が平面上の任意の点であるという点です．この 2 点が平面上の任意の点であるということは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は平面上の任意のベクトルであることと同値です．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$$

が成り立つためには，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$ でなければならないという風に考えます．問題文で 2 点 P, Q は異なる点とは一言も書いていないので，安易に $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq\vec{0}$ としないようにしましょう．