16 （'05　名古屋女子大） **【難易度】** … 標準

三角形 ABC があり，各辺の長さを AB = 6, BC = 5, CA = 7 とする．辺 AB 上に点 D，AC 上に点 E をとって，三角形 ADE を作る．三角形 ADE の面積が三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{3}$ であるとき，次の各問いに答えよ．

（1） 線分 AD と AE の長さの積を求めよ．

（2） DE の最小値を求めよ．

【テーマ】：三角形を二分する線分の最小値

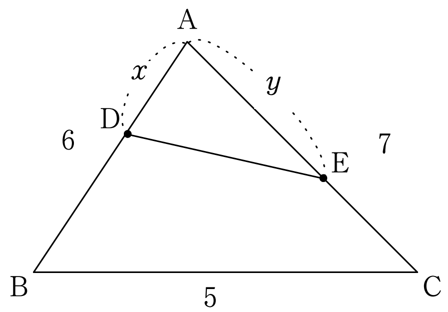
方針

AD = x, AE = y とおいて，面積の条件から xy を求めることができます．DE の最小値は，余弦定理を利用して，DE を xy で表すことから始めよう．

東京工業大学・京都大学など，様々な大学で類題が出題されています．それらの大学では，辺の長さに文字が入っていたりして，場合分けが必要になったりするものがあります．本問はその中でも一番易しいタイプです．比較的見通しが立つので，解きやすい問題になっています．最小値は，相加平均・相乗平均の関係をうまく利用できるかどうかがポイントになります．

相加平均・相乗平均の関係が使える場面では，文字が 0 以上であることと，和と積の関係から最大値・最小値を求める．また，逆数の形があるなど，ある程度決まった状況が多いので，演習を通して経験しておくことが必要です．

解答



（1） AD = x, AE = y とおくと，

$$\triangle \mathrm{ADE} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin A$$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \sin A$$

である．また，題意より $\triangle \mathrm{ABC} = 3\triangle \mathrm{ADE}$ であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \sin A = 3\cdot \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin A$$

$$\iff \quad \boldsymbol{xy = 14}\cdots\cdots(\textbf{答}) \quad \cdots\cdots①$$

（2） △ABC で余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{36+49-25}{2\cdot 6\cdot 7} \\ &= \frac{60}{2\cdot 6\cdot 7} \\ &= \frac{5}{7} \quad \cdots\cdots② \end{aligned}$$

△ADE で余弦定理より，

$$\begin{aligned} \mathrm{DE}^2 &= x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cdot \cos A \\ &= x^2+y^2-2\cdot 14\cdot \frac{5}{7} \quad (\because ①, ②) \\ &= x^2+y^2-20 \end{aligned}$$

ここで，$x^2>0, y^2>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$x^2+y^2 \geqq 2\sqrt{x^2\cdot y^2} = 2xy = 28 \quad (\because ①)$$

等号は，$x^2 = y^2$ すなわち $x = y = \sqrt{14}$ のとき成り立つ．ゆえに，

$$\mathrm{DE}^2 \geqq 28 - 20 = 8$$

DE>0 であるから，$\mathrm{DE} \geqq 2\sqrt{2}$ である．ゆえに，DE の最小値は，$\mathrm{AD} = \mathrm{AE} = \sqrt{14}$ のとき，$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$……(**答**)

解説

最大値・最小値を求める方法は，様々な方法があります．2 次関数であれば平方完成をすればいいし，3 次関数以上なら微分して増減表を書けば求めることができます．三角関数や指数関数・対数関数も置き換えなどを用いてやれば 2 次関数や 3 次関数に帰着できることが多々あります．しかし，それ以外にも分数の形をしたものや本問のように 2 変数のものなど様々なものがあります．それらに関しても最大値・最小値を求める手段はいろいろあるのです．その一つの方法が相加平均・相乗平均の関係です．シュワルツの不等式を用いる問題もあります．最大値・最小値に関する問題は入試では頻出なので，より多くの経験を積んでおきましょう．