13 （′06　大阪歯科大） **【難易度】** … 標準

x の整式 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が

$$f_1(x)=x^2+2x-2,\ x^2f_{n+1}(x)-x^3+x^2=\int_0^x tf_n(t)\,dt$$

をみたすものとする.

（1） $f_2(x)$ を求めよ.

（2） $f_n(x)$ は，x の 2 次式であることを示せ.

（3） $f_n(x)$ を求めよ.

【テーマ】：積分方程式と漸化式

方針

(1) は数列の漸化式を解くときと同様に，$n=1$ を代入します．(2) は，数学的帰納法，(3) は (2) の結果を用いますが，係数が n に依存しているという点に注意しましょう．

積分方程式と漸化式の融合問題です．厄介なのは，係数が n に依存するので，(3) では，$f_n(x)=a_nx^2+b_nx+c_n$ $(a \fallingdotseq 0)$ のように係数を設定する必要があります．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた漸化式に $n=1$ を代入して，

$$\begin{aligned} x^2f_2(x)-x^3+x^2 &= \int_0^x tf_1(t)\,dt \\ &= \int_0^x t(t^2+2t-2)\,dt \\ &= \int_0^x (t^3+2t^2-2t)\,dt \\ &= \Big[\,\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3-t^2\,\Big]_0^x \\ &= \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2 \end{aligned}$$

これより，$f_2(x)-x+1=\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x-1$ 　$\therefore$ $\boldsymbol{f_2(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{3}x-2}$**……（答）**

（2） **【証明】**

$f_n(x)$ が 2 次式，すなわち，$f_n(x)=ax^2+bx+c$ $(a \fallingdotseq 0)$ であることを，数学的帰納法を用いて示す.

（i） $n=1$ のとき，

$$f_1(x)=x^2+2x-2$$

より，成り立つ.

（ii） $n=k$ のとき，すなわち，

$$f_k(x)=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$$

と表されると仮定すると，与えられた漸化式から，

$$\begin{aligned} x^2 f_{k+1}(x) - x^3 + x^2 &= \int_0^x t f_k(t)\,dt \\ &= \int_0^x (at^3 + bt^2 + ct)\,dt \\ &= \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 \\ \therefore\ \ x^2 f_{k+1}(x) &= \frac{1}{4}ax^4 + \left(\frac{1}{3}b + 1\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}c - 1\right)x^2 \\ \therefore\ \ f_{k+1}(x) &= \frac{1}{4}ax^2 + \left(\frac{1}{3}b + 1\right)x + \frac{1}{2}c - 1 \end{aligned}$$

$a \fallingdotseq 0$ であるから，$f_{k+1}(x)$ は x の 2 次式である．よって，$n = k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して，$f_n(x)$ は x の 2 次式であることが示された．(**証明終**)

(3)　$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$ $(a_n \fallingdotseq 0)$ とおくと，(2) より，

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{4}a_n x^2 + \left(\frac{1}{3}b_n + 1\right)x + \frac{1}{2}c_n - 1$$

よって，

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + 1 & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n - 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ c_1 = -2$ であるから，① より，

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

であり，② より，

$$b_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(b_n - \frac{3}{2}\right) \iff b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}$$

③ より，

$$c_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(c_n + 2) \iff c_n = (c_1 + 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2 \qquad \therefore\ \ c_n = -2$$

以上より，

$$\boldsymbol{f_n(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} x^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}\right\} x - 2 \cdots\cdots} \textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

関数の係数が n に依存している問題です．各項の係数に関する漸化式を立式しなければならないため，数列の知識が重要になってきます．しかし，一度経験しておけば比較的容易な問題なので，何度か演習を積んで慣れておけば十分でしょう．