12 ((1)…'82 東北学院大・(2)…'79 学習院大) 【難易度】 … やや難

次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt - \int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$ の値を求めよ．

【テーマ】：定積分の計算

方針

(1) は $\theta = x - t$ と置換すると，同じ形が現れます．(2) は，積分区間を $[-1, 0], [0, 1]$ で分けて考えます．

♣ ♠

解答

(1) $\theta = x - t$ とおくと，$d\theta = -dt$

t	$0 \to x$
θ	$x \to 0$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_x^0 \sin^2\theta\cos(x-\theta)\,(-d\theta) - \int_x^0 \cos\theta\sin^2(x-\theta)\,(-d\theta)\\
&= \int_0^x \sin^2\theta\cos(x-\theta)\,d\theta - \int_0^x \cos\theta\sin^2(x-\theta)\,d\theta\\
&= \int_0^x \sin^2 t\cos(x-t)\,dt - \int_0^x \cos t\sin^2(x-t)\,dt
\end{aligned}
$$

よって，

$$2\left(\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt - \int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt\right) = 0$$

となるので，

$$\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt - \int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt = \mathbf{0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $\displaystyle(\text{与式}) = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$

となるので，第 1 式において $x = -t$ とおくと，$dx = -dt$

x	$-1 \to 0$
t	$1 \to 0$

よって，

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx &= \int_1^0 \frac{t^2}{1+e^{-t}}\,(-dt)\\
&= \int_0^1 \frac{t^2}{1+e^{-t}}\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{t^2e^t}{e^t+1}\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{x^2e^x}{e^x+1}\,dx
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 \frac{x^2e^x}{e^x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}\,dx\\
&= \int_0^1 \frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}\,dx\\
&= \int_0^1 x^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) では，置換後に同じ形が出てくることに着目して計算します．定積分の計算は，積分変数によらないということを知っておく必要があります．

(2) は，ノーヒントでは難問でしょう．いろいろ置き換えを考えた人が多いと思いますが，積分区間を分けてから一方のみで置換積分を行うという発想が必要になります．かなり特殊な問題ではありますが，発想力を磨くには良い問題ではないでしょうか？その際に，(1) と同様に，定積分の計算は，積分変数によらないということを利用します．

【定積分の性質】

定積分の値は，積分変数によらない．

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$