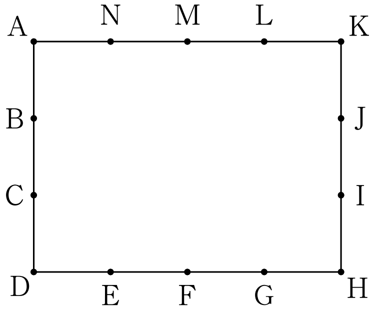
11 ('02 岡山大) **【難易度】** … 標準

図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか．

(2) これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか．



【テーマ】：数え上げ

方針

14 個の点から 3 点選んでくるだけでは三角形ができるとは限りません．三角形とならない場合を正確に数え上げましょう．また，二等辺三角形を数えるときは，頂点の位置で丁寧に場合分けするとよいでしょう．

解答

(1) 14 個の点から 3 点を選ぶ場合の数は，

$${}_{14}C_3=\frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2\cdot1}=364\ (\text{通り})$$

このうち 3 点が一直線上にあると三角形はできないので，その場合を除く必要がある．

3 点が線分 AD 上にあるのは，${}_4C_3=4$ (通り)

線分 KH 上も同様に 4 通り．

3 点が線分 AK 上にあるのは，${}_5C_3=10$ (通り)

線分 DH 上も同様に 10 通り．

よって，求める三角形の個数は，

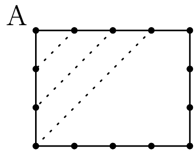
$$364-2\times4-2\times10=\mathbf{336}(\textbf{個})\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) 二等辺三角形の等辺の交点を P とする．

(i) P が点 A にあるとき，

△ABN, △ACM, △ADL の 3 通り

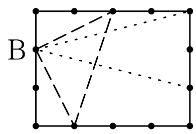
P が D, H, K にあるときも同様なので，$3\times4=12$ (個)



(ii) P が点 B にあるとき，

△BME, △BKI の 2 通り

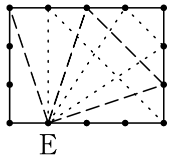
P が C, I, J にあるときも同様なので，$4\times2=8$ (個)



(iii) P が点 E にあるとき，

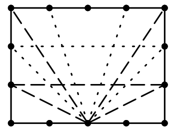
△EAI, △ENH, △EMI, △ELJ, △EMA の 5 通り

P が G, N, L にあるときも同様なので，$4\times5=20$ (個)



（iv） P が点 F にあるとき,

$\triangle$FLN, $\triangle$FKA, $\triangle$FBJ, $\triangle$FCI の 4 通り



F

P が M にあるときも同様なので, $4 \times 2 = 8$（個）

ゆえに，求める二等辺三角形の個数は,

$12 + 8 + 20 + 8 =$ **48(個)**……（答）

◇ ♡

解説

本問のように，地道に数え上げる問題は闇雲に数えてはいけません．自分なりに数える規則を作って漏れがないような数え方を工夫しましょう．**解答** では，二等辺三角形の頂点の位置で場合分けして数えています．