9 ('05 東京工業大) 【難易度】… 標準

実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたしながら変化するとする．

(1) $s=x+y, t=xy$ とするとき，点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ．

(2) 負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ．

【テーマ】：線形計画法の応用

方針

(1) の置き換えをヒントに (2) を解いていきます．必ず知っておきたい置き換えで，これは問題の見通しをよくするための置き換えになります．ただし，置き換えをしたら必ず制約がついてくることを忘れてはいけません．

頻出といってもよい置き換えです．2 変数を 1 変数にするような変換もありますが，本問の置き換えは，2 変数が 2 変数になるので，一見してメリットがなさそうに見えます．しかし，これは問題の見通しをよくするための変形なので，その効果は後ほどわかってくるでしょう．和と積を新しい文字でおいたので，解と係数の関係を用いて x, y が解となるような 2 次方程式を立式します．あとは，実数条件から s, t のとり得る範囲を求めましょう．

解答

(1) $x^2+y^2 \leqq 1 \iff (x+y)^2-2xy \leqq 1$

であるから，

$$s^2-2t \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

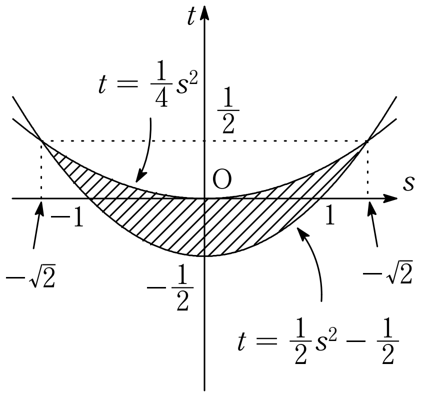
また，x, y は 2 次方程式

$$z^2-sz+t=0$$

の 2 解であり，x, y が実数であることから，この方程式の判別式を D とすると，

$$D=s^2-4t \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①, ② より点 (s, t) の動く範囲は，下図の斜線部分である（境界線上の点を含む）．



(2) $xy+m(x+y)=t+ms$ であるから，$t+ms=k$ とおくと，

$$t=-ms+k \quad \cdots\cdots ③$$

直線 ③ の傾きは $-m \leqq 0$ であるから，k が最大となるのは，③ が点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通るときで，このとき，

$$k=\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$$

である．

また，$t=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$ 上の点 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ における接線の傾きが，$-\sqrt{2}$ となることから，最小値は次のように場合分けを行う．

（ｉ） $m \geqq \sqrt{2}$ のとき，

k が最小となるのは，③ が点 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を通るときで，このとき，

$$k=-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$$

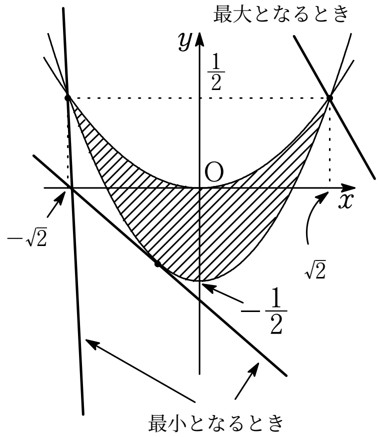
（ii） $0 \leqq m<\sqrt{2}$ のとき，

k が最小となるのは，③ が $t=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$ と接するときである．

$$\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}=-ms+k \iff s^2+2ms-2k-1=0$$

であるから，判別式を D とすると，

$$D/4=m^2+2k+1=0 \quad \therefore\ k=-\frac{m^2+1}{2}$$



以上より，求める最大値・最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \cdots\cdots \ \sqrt{2}m+\frac{1}{2} \\ \textbf{最小値} \cdots\cdots \ \begin{cases} -\sqrt{2}m+\frac{1}{2} & (m \geqq \sqrt{2}) \\ -\frac{m^2+1}{2} & (0 \leqq m<\sqrt{2}) \end{cases} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

$s=x+y,\ t=xy$ という置き換えを行う際は，$s,\ t$ のとり得る値を求めることを忘れないようにしましょう．これは，$x,\ y$ が実数であるという条件から導かれます．また，線形計画法の応用問題なので，図をできるだけ丁寧にかく練習をしておきましょう．領域の境界が曲線になっているときは接線の傾きに注意を払うことが必要になります．本問では，最大値は，傾きに関係なく $(x,\ y)$ がとる値は同じですが，最小値を求めるときは，直線の傾きで場合分けすることが必要になります．この場合分けは，点 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ における接線の傾きを基準に行うことを理解しておきましょう．下図を参考にして，定規などを当てて太実線を平行移動すれば，最小値をとるときは，接線の傾きで場合分けが必要であることが理解できるはずです．