8 ((1)…'79 山梨医科大・(2)…'81 山梨大) 【難易度】 … やや難

次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^{-x}}\,dx$ の値を求めよ．

(2) $x=\pi-t$ と置換することにより，$\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

【テーマ】：定積分の計算

方針

(1) は $e^x=t$ と置換します．(2) は，問題文中に置換する式が与えられていますが，これだけでは求められないので，再び置換しましょう．

解答

(1)

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^{-x}}\,dx=\int_0^1 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{3x}+1}\,dx$$

$e^x=t$ とおくと，$e^x\,dx=dt$ となるので，

x	$0 \to 1$
t	$1 \to e$

$$（与式）=\int_1^e \frac{t-1}{t^3+1}\,dt$$

ここで，$\dfrac{t-1}{t^3+1}=\dfrac{a}{t+1}+\dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{t-1}{t^3+1} &= \frac{at^2-at+a+(bt+c)(t+1)}{t^3+1}\\ &= \frac{at^2-at+a+bt^2+(b+c)t+c}{t^3+1}\\ &= \frac{(a+b)t^2+(-a+b+c)t+a+c}{t^3+1}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=1 \\ a+c=-1 \end{cases}$$

であればよい．これを解くと，$a=-\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}（与式） &= \int_1^e \left(\frac{-\frac{2}{3}}{t+1}+\frac{\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}}{t^2-t+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{3}\int_1^e \left(\frac{-2}{t+1}+\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{3}\Big[-2\log|t+1|+\log|t^2-t+1|\Big]_1^e\\ &= \frac{1}{3}\left[\log\left|\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\right|\right]_1^e\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log\frac{e^2-e+1}{(e+1)^2}-\log\frac{1}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\log\frac{4(e^2-e+1)}{(e+1)^2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$x=\pi-t$ とおくと，$dx=-dt$

x	$0 \to \pi$
t	$\pi \to 0$

であり，$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,(-dt)\\
&= \int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt\\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}-\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\right)dt\\
2I &= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt\\
\therefore\ I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt
\end{aligned}$$

ここで，$\cos t=s$ とおくと，$-\sin t\,dt=ds$

t	$0 \to \pi$
s	$1 \to -1$

となるので，

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{1+s^2}\,ds\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+s^2}\,ds
\end{aligned}$$

さらに，$s=\tan\theta$ とおくと，$ds=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

s	$-1 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$

となるので，

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\
&= \frac{\pi}{2}\Big[\,\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

◇　♡

解説

(1) では，何を t と置換するかで明暗が分かれますが，$\displaystyle\int_1^{e}\frac{t-1}{t^3+1}\,dt$ の形まで変形できたならそこからの道筋は，部分分数分解を利用する方法に絞られます．変形できるようにしておきましょう．

(2) では，問題文中にヒントがありますが，置換を行った後も 2 回置換しなければならず一筋縄ではいかないでしょう．三角関数の積分には，十分慣れ親しんでおきましょう．また，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+s^2}\,ds$ の形までくれば後は，基本問題です．