4　('05　筑波大)　　**【難易度】** … やや難

曲線 C ： $y=e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\,e^a)$, $\mathrm{P}(t,\,e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す．さらに，$r(a)=\displaystyle\lim_{t\to a}L_a(t)$ と定義する．

(1)　$r(a)$ を求めよ．

(2)　a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：接線と法線

方針

(1) は図をかいて丁寧に計算することを心がけましょう．(2) は $r(a)$ が最小になるためには，何が最小になればよいのかを考え，効率よい計算をしましょう．

♣　♠

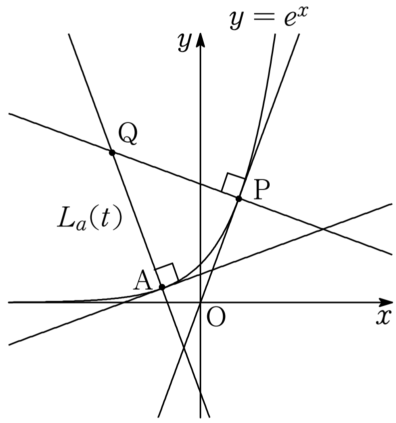
解答

(1)　点 A, P における法線の方程式は，$y'=e^x$ であることより，

$$\text{A における法線}\quad:\quad y=-\frac{1}{e^a}(x-a)+e^a \quad\cdots\cdots①$$

$$\text{P における法線}\quad:\quad y=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t \quad\cdots\cdots②$$

よって，①, ② の交点 Q は，



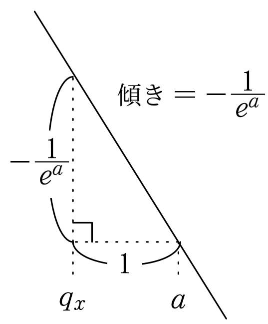
$$-\frac{1}{e^a}(x-a)+e^a=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t$$

$$-\frac{1}{e^a}(x-a)+\frac{1}{e^t}(x-t)=e^t-e^a$$

$$\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^a}\right)x=e^t-e^a-\left(\frac{a}{e^a}-\frac{t}{e^t}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x\quad &=\quad \frac{e^t-e^a-\left(\frac{a}{e^a}-\frac{t}{e^t}\right)}{\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^a}}\\ &=\quad \frac{e^te^a(e^t-e^a)-(ae^t-te^a)}{e^a-e^t}\end{aligned}$$

この値を q_x とする．右図を参考にして，



$$\begin{aligned}L_a(t)=\mathrm{AQ}\quad &=\quad \sqrt{(a-q_x)^2+(a-q_x)^2\left(-\frac{1}{e^a}\right)^2}\\ &=\quad |a-q_x|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}L_a(t)\quad &=\quad \left|a-\frac{e^te^a(e^t-e^a)-(ae^t-te^a)}{e^a-e^t}\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\\ &=\quad \left|\frac{-e^te^a(e^t-e^a)+(a-t)e^a}{e^a-e^t}\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\\ &=\quad \left|e^te^a+\frac{a-t}{e^a-e^t}e^a\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\end{aligned}$$

ここで，

$$\lim_{t\to a}\frac{a-t}{e^a-e^t}=\lim_{t\to a}\frac{1}{\frac{e^a-e^t}{a-t}}=\frac{1}{e^a}$$

であるから,

$$\begin{aligned} r(a) &= \lim_{t\to a}L_a(t) \\ &= \lim_{t\to a}\left|e^te^a+\frac{a-t}{e^a-e^t}e^a\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}} \\ &= \left|e^{2a}+\frac{1}{e^a}\cdot e^a\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}} \\ &= (e^{2a}+1)\sqrt{\frac{e^{2a}+1}{e^{2a}}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(e^{2a}+1)^{\frac{3}{2}}}{e^a}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(2)　$r(a)=\sqrt{\dfrac{(e^{2a}+1)^3}{e^{2a}}}$ より, $e^{2a}=u$ とおくと $u>0$ であり,

$r(a)=\sqrt{\dfrac{(u+1)^3}{u}}$ となるので, $f(u)=\dfrac{(u+1)^3}{u}$ ($u>0$) とおく.

$r(a)$ の最小値を求めるためには $f(u)$ の最小値を求めればよい.

$$f'(u)=\frac{3(u+1)^2\cdot u-(u+1)^3}{u^2}=\frac{(u+1)^2(2u-1)}{u^2}$$

であるから, $f'(u)=0$ のとき, $u>0$ より, $u=\dfrac{1}{2}$. よって, 増減表は次のようになる.

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$	/	$-$	0	$+$
$f(u)$	/	↘	最小値	↗

よって, $u=\dfrac{1}{2}$ のとき, $f(u)$ は最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}}=\dfrac{27}{4}$ をとるので, $r(a)$ の最小値は,

$$e^{2a}=\frac{1}{2}\iff a=-\frac{1}{2}\log 2 \text{ のとき, } \sqrt{\frac{27}{4}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

をとる.

◇ ♡

解説

計算量が多いので, 要所要所で要領のいい計算が必要になります. 特に, $L_a(t)$ を求める部分では, 式が複雑になるので置き換えをして書く量を減らしています. また, 傾きを利用して計算するとすっきりします.