2 （'03　愛知工科大・改） 【難易度】… 標準

変数 x の範囲が実数全体であるとき，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【テーマ】：分数式の最大値・最小値

方針

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=k$ とおいて，k の最大値・最小値を求めます．その際に x が実数であるという条件を利用します．

一見すると数学 Ⅲ の問題に見えますが，数学 Ⅰ の範囲で処理することができます．方針 で述べたように，式の値を k とおき，分母を払って x に関する 2 次方程式と見なすことがポイントです．あとは，x が実数であるという条件を使います．

♣ ♠

解答

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=k$ とおくと，

$$x^2+2x+1=kx^2-kx-k \iff (k-1)x^2-(k+2)x-k-1=0 \quad \cdots\cdots①$$

（ｉ） $k=1$ のとき，① は，

$$-3x-2=0 \quad \therefore \quad x=-\frac{2}{3}$$

（ii） $k \neq 1$ のとき，① は実数解をもつことから，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (k+2)^2-4(k-1)(-k-1) \geqq 0 \\ & k^2+4k+4+4(k^2-1) \geqq 0 \\ & 5k^2+4k \geqq 0 \\ & k(5k+4) \geqq 0 \qquad \therefore \quad k \leqq -\frac{4}{5},\ 0 \leqq k \end{aligned}$$

$k \neq 1$ より，$k \leqq -\dfrac{4}{5},\ 0 \leqq k<1,\ 1<k$ である．

（ｉ），（ii）より，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=k$ のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{k \leqq -\frac{4}{5},\ 0 \leqq k} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

である．

数学 Ⅲ を学習している人は，次のようにしても解答することができます．

別解

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2-x-1)-(x^2+2x+1)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{-(3x^2+4x+1)}{(x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{-(3x+1)(x+1)}{(x^2-x-1)^2} \end{aligned}$$

となるので，$f'(x)=0$ のとき，$x=-1,\ -\dfrac{1}{3}$ である．また，$x^2-x-1 \neq 0$ であることから，$x \neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ で

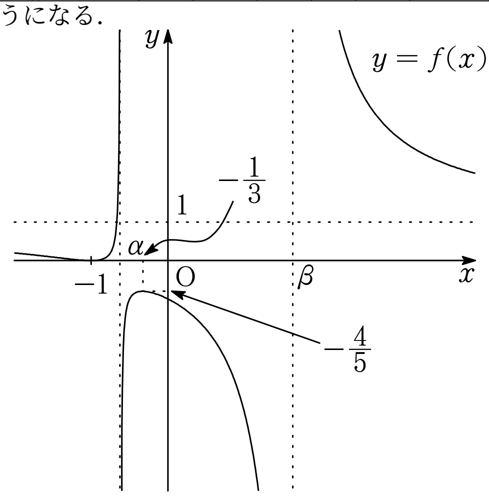
あり，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$$\lim_{x\to\alpha-0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to\alpha+0} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to\beta-0} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\beta+0} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$$

となるので，増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	β	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	(1)	↘	0	↗		↗	$-\frac{4}{5}$	↘		↘	(1)

よって，グラフは，次のようになる．



ゆえに，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=f(x)$ のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{f(x)\leqq -\frac{4}{5},\ 0\leqq f(x)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

理系の人は，数学 Ⅲ の知識が邪魔して微分してしまいがちですが，実は数学 Ⅰ の知識があれば十分解答できます．このような解法には一度は触れておきたいものです．問題を様々な角度から解答する力を養うことは非常に大切なことです．

ちなみに，別解 を見てもわかるように微分すると，様々な点に注意して極限値を計算しなければならないため，ミスをしやすくなります．