1 **【難易度】** … 基本

a を定数とするとき，$f(x) = x^2 - 2x + 2 \ (a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする．

(1) $M(a), m(a)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $y = M(a)$，$y = m(a)$ のグラフをかき，それぞれの最小値を求めよ．

【テーマ】：２次関数の最大値・最小値

方針

まずは，平方完成をして**軸の方程式**を求めます．次に簡単なグラフを使って軸と定義域の位置関係に着目します．**最大値・最小値をとる x の値が変化するところ**を探してそこを基準に場合分けを行いましょう．

この問題には大きく分けて次の**３種類のタイプ**があります．

（ｉ） 関数が固定されていて**定義域が変化**する（定義域に文字を含む）

（ii） **関数が変化**し，定義域は固定されている（関数に文字を含む）

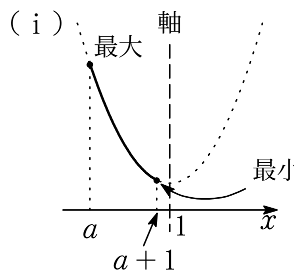
（iii） **関数と定義域が両方とも変化**する（関数にも定義域にも文字を含む）

（iii）は厄介ですが,（ｉ）,（ii）は頻出タイプなので，まずはこちらをしっかりと理解しましょう．本問は,（ｉ）のタイプですがいずれにせよ考え方は同じです．

♣ ♠

解答

(1) $f(x) = (x-1)^2 + 1$ と平方完成できるので，軸の方程式は，$x = 1$ であり，頂点は $(1, 1)$ である．したがって，次の 5 通りに場合分けする．

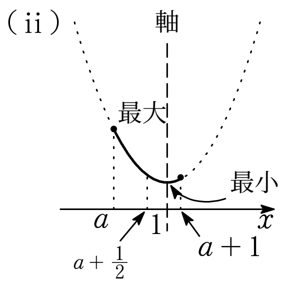


- （ｉ） 軸が**定義域の右側**
- （ii） 軸が**定義域内の右側**
- （iii） 軸が**定義域の中央**
- （iv） 軸が**定義域内の左側**
- （ｖ） 軸が**定義域の左側**

これより，求める最大値・最小値は，次のようになる．

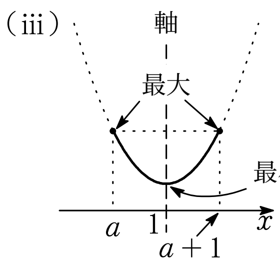
（ｉ） $a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき，

$$\begin{cases} M(a) = f(a) = a^2 - 2a + 2 \\ m(a) = f(a+1) = (a+1-1)^2 + 1 = a^2 + 1 \end{cases}$$



（ii） $a + \dfrac{1}{2} < 1 \leqq a+1$ すなわち $0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{cases} M(a) = f(a) = a^2 - 2a + 2 \\ m(a) = f(1) = 1 \end{cases}$$



（iii） $a + \dfrac{1}{2} = 1$ すなわち $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，

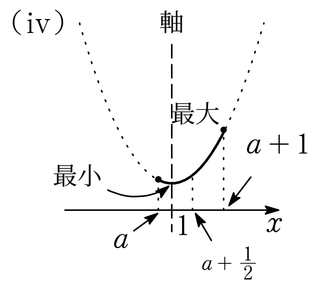
$$\begin{cases} M(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \\ m(a) = f(1) = 1 \end{cases}$$

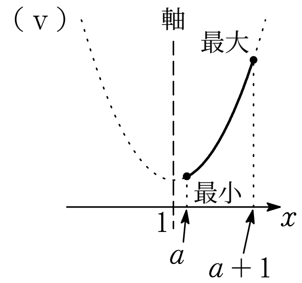
（iv） $a \leqq 1 < a + \frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2} < a \leqq 1$ のとき，

$$\begin{cases} M(a) = f(a+1) = a^2 + 1 \\ m(a) = f(1) = 1 \end{cases}$$

（v） $1 < a$ のとき，

$$\begin{cases} M(a) = f(a+1) = a^2 + 1 \\ m(a) = f(a) = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

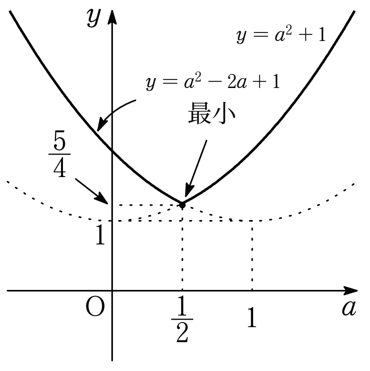




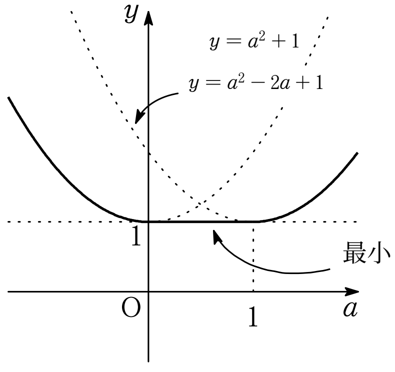
ゆえに，最大値・最小値をまとめると次のようになる．

$$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} a^2 - 2a + 2 & \left(a \leqq \frac{1}{2}\right) \\ a^2 + 1 & \left(a > \frac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad m(a) = \begin{cases} a^2 + 1 & (a < 0) \\ 1 & (0 \leqq a \leqq 1) \\ a^2 - 2a + 2 & (a > 1) \end{cases}}$$ ……(**答**)

(2) (1) より，$y = M(a)$, $y = m(a)$ のグラフはそれぞれ次のようになる．



$y = M(a)$ のグラフ



$y = m(a)$ のグラフ

これより，$y = M(a)$, $y = m(a)$ の最小値は，それぞれ

$M(a)$ は，$a = \frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{9}{4}$
$m(a)$ は，$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，最小値 1 ……(**答**)

をとる．

◇ ♡

解説

最大値だけ最小値だけを求める場合は，(1) の答えのように場合分けが少なくてすみます．先ほどの 5 つの場合を見れば最大値だけを求めるのなら，（i）と（ii）は同じで，（iii）が最大値をとる x の値が 2 つ存在するので，ちょっと特殊で，（iv）と（v）が同じなので，3 つですみます．人によっては，（iii）をどちらかに含めて 2 つに場合分けをする人もいますが，x の値が 2 つ存在するので分けました．ただし，答えをまとめる段階では，最大値をとる x の値は気にしないので，まとめることにします．また，最小値だけなら，（ii），（iii），（iv）が同じなので 3 つですね．ここでは，下に凸な関数を扱いましたが，上に凸な関数を扱う場合も同様な考えで場合分けをします．ここで，多くの人が悩むのが ＝（イコール）の位置ではないでしょうか？これは，a の値がちゃんと繋がっていればどこにあってもかまいません．例えば，（ii）で $0 < a < \frac{1}{2}$ としてしまうと，a に関する場合分けで $a = 0$ だけが扱われていないことになるので，このような事態にならないように ＝（イコール）を入れてやればよいのです．また，本問のように 2 次関数の値を計算する際は，元の式に代入するより，**平方完成した式に代入**するほうが簡単に計算できる場合があります．どちらに代入したほうが簡単かは場合によりますので，臨機応変に計算できるようにしておきましょう．$a + \frac{1}{2}$ は定義域 $(a \leqq x \leqq a+1)$ のちょうど真ん中の値になります．つまり，ここでは軸 $(x = 1)$ が定義域の中央に対して，「右にある（ii）」のか「中央にある（iii）」のか「左にある（iv）」のかで場合分けするためこのような値が出てきます．