35 （山梨大・改）　【難易度】… やや難

a を正の定数とする．xyz 空間において，

$$\text{球体 } x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2 \text{ と円柱 } (x-a)^2+y^2 \leqq a^2$$

を考える．この 2 つの立体の共通部分の体積を求めよ．

【テーマ】：立体同士が交わる部分の体積

方針

平面 $z=t$ での切り口の面積を t で表し，t で積分すれば体積が求まります．

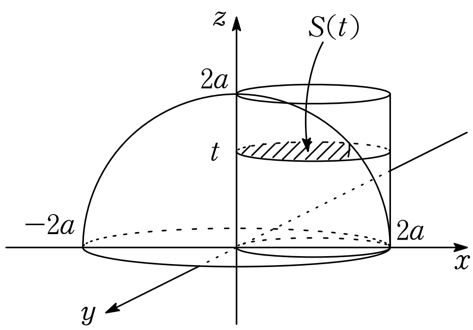
立体の共通部分の体積を求める問題は，経験していなければ難問でしょう．経験したことがない人は，本問で基本的な考え方を身につけ類題演習を解いておきましょう．

ポイント

平面 $z=t$ での切り口の面積を t で表す！

解答

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2 & \cdots\cdots \text{①} \\ (x-a)^2+y^2 \leqq a^2 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$



xy 平面に関する対称性より $z \geqq 0$ の部分で考える．
平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2a)$ による切り口は，①, ② に $z=t$ を代入して得られる次の 2 つの円盤の共通部分である．

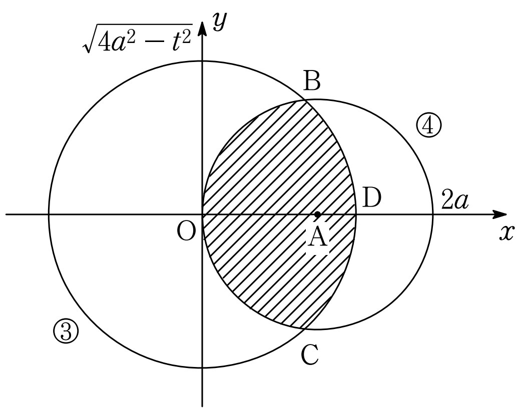
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4a^2-t^2 & \text{かつ} \quad z=t \\ (x-a)^2+y^2 \leqq a^2 & \text{かつ} \quad z=t \end{cases}$$

断面を xy 平面に正射影して考える．A$(a, 0)$ とし，2 つの円

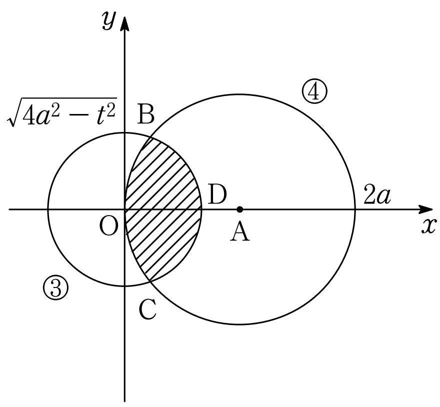
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4a^2-t^2 & \cdots\cdots \text{③} \\ (x-a)^2+y^2 = a^2 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

の交点を下図のように B, C とおく．さらに D$(\sqrt{4a^2-t^2}, 0)$ とおく．

（i） $4a^2-t^2 \geqq a^2 \iff 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}a$ のとき，



（ii） $4a^2-t^2 \leqq a^2 \iff \sqrt{3}a \leqq t \leqq 2a$ のとき，



断面積を $S(t)$ とし，$\angle \mathrm{AOB}=\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\mathrm{OB}=\sqrt{4a^2-t^2}=2a\cos\theta \qquad \therefore\ t=2a\sin\theta \cdots\cdots⑤$$

(i), (ii) のいずれの場合も

$$\begin{aligned}
S(t) &= 2(\text{扇形 OBD} + \text{扇形 AOB} - \triangle\mathrm{AOB})\\
&= 2\left\{\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\cdot\theta+\frac{1}{2}a^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}a^2\sin(\pi-2\theta)\right\}\\
&= 4a^2\cos^2\theta\cdot\theta+a^2(\pi-2\theta)-a^2\sin 2\theta\\
&= a^2(4\theta\cos^2\theta-\sin2\theta+\pi-2\theta)
\end{aligned}$$

よって，求める体積を V とすると，

$$V=2\int_0^{2a}S(t)\,dt$$

となるので，⑤ の関係式を用いて置換すると，$dt=2a\cos\theta d\theta$ であり，

t	$0 \to 2a$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

となるので，

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(4\theta\cos^2\theta-\sin2\theta+\pi-2\theta)\cdot 2a\cos\theta\,d\theta\\
&= 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{4\theta\cos^3\theta-\sin2\theta\cos\theta+(\pi-2\theta)\cos\theta\right\}\,d\theta\\
&= 4a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\cos3\theta+3\cos\theta)\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\cos\theta\,d\theta\right)
\end{aligned}$$

ここで，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\cos3\theta+3\cos\theta)\,d\theta$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

とおいて，それぞれの積分値を計算すると，

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\theta\left(\frac{1}{3}\sin3\theta+3\sin\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\sin3\theta+3\sin\theta\right)d\theta\\
&= \frac{4}{3}\pi+\left[\frac{1}{9}\cos3\theta+3\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{4}{3}\pi-\left(\frac{1}{9}+3\right)\\
&= \frac{4}{3}\pi-\frac{28}{9}
\end{aligned}$$

$$I_2 = \left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \left[(\pi-2\theta)\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\,d\theta\\
&= \left[-2\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2
\end{aligned}$$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
V &= 4a^3(I_1 - I_2 + I_3) \\
&= 4a^3\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{28}{9} - \frac{2}{3} + 2\right) \\
&= 4a^3\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}\right) \\
&= \boldsymbol{16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}\right)a^3} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

解答の方針が分かっていても計算量が非常に多いので，計算間違いをしやすく V が立式できたとしても正解までたどり着くためには，計算力が必要です．さて，簡単に解説を加えておきましょう．解答中にある（ｉ）と（ii）の場合分けは，点 A が円盤の共通部分内にあるかないかで場合分けを行っています．解答中の図は，下図のように，切った部分を上から見ている図です．

円柱の方はどこで切っても同じ半径ですが，球体の方は切る場所によって半径が変わってしまうので，t での場合分けが必要になります．しかし，共通部分の面積を計算すれば分かりますが，結局どちらにしても計算式は同じになるので，実はそれほど厄介なことにはなりません．共通部分の面積が求められたら，体積の公式にしたがって，t を 0 から $2a$ まで積分してやればよいのです．