33 （'98　九州大）　　**【難易度】… 標準**

次の問いに答えよ．

（1）　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ．

（2）　不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

（1）は不等式の証明の基本で大きい方から小さい方を引いて正であることを示します．（2）はある有名不等式と（1）を用いれば証明することができます．

本問のように，（1）で得られた結果を（2）以降で用いることはよくあることです．このようなタイプの問題はしっかりと演習を積んで慣れておく必要があります．また，絶対値が絡んだ有名不等式

$$\big||x|-|y|\big| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|,\quad \big||x|-|y|\big| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$$

は知っておく必要があります．この不等式を**三角不等式**といいます．（2）では，この不等式を応用して用います．

ポイント

三角不等式 $\big||x|-|y|\big| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$ の利用

♣　　♠

解答

（1）　**【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\\ &= \frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}\\ &= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geqq 0 \quad (\because\ x \geqq y \geqq 0)\end{aligned}$$

等号は，$x=y$ のとき，成立する．ゆえに，示された．　　**（証明終）……（答）**

（2）　**【証明】**

$|x+y+z| \leqq |x|+|y|+|z|$ が成り立つので，（1）の結果から，

$$\frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \qquad \cdots\cdots Ⓐ$$

$$\iff \frac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|}+\frac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$$

$$\iff \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}+\frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \qquad \cdots\cdots Ⓑ$$

ここで，Ⓐ での等号成立条件は，$x=y=z$ であり，Ⓑ での等号成立条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} = \dfrac{|x|}{1+|x|} \\ \dfrac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} = \dfrac{|y|}{1+|y|} \\ \dfrac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} = \dfrac{|z|}{1+|z|} \end{cases}$$

がすべて成り立つときであるから，x, y, z のうち少なくとも 2 つが 0 であればよい．
ゆえに，等号が成り立つのは，x, y, z のうち少なくとも 2 つが 0 であればよい．
以上より，示された． **（証明終）……（答）**

解説

(2) の式変形が難しいでしょう．(1) の結果を生かすためには，まず (1) での仮定 ($x \geqq y \geqq 0$) をみたす不等式が必要になります．ここでは，それが三角不等式なのです．しかし，$|x+y| \leqq |x|+|y|$ をそのまま使っても示したい不等式は出てきません．これを次のように式変形してから用いる必要があります．
この不等式の y に $y+z$ を代入すると，

$$|x+y+z| \leqq |x|+|y+z|$$

となります．次に $|y+z|$ の部分に再び三角不等式を利用すると，

$$|x+y+z| \leqq |x|+|y+z| \leqq |x|+|y|+|z|$$

となります．あとは，最後の式変形を思いつくかどうかがポイントですが，$\dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|}$ より $\dfrac{|x|}{1+|x|}$ の方が大きければ (y, z についても同様)，目的の不等式が得られると考えるところが重要になります．