32　**【難易度】… やや難**

θ を媒介変数として曲線 C を次のように定義する．

$$C\ :\ \begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}\quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

(1)　曲線 C は y 軸に関して対称であることを示せ．

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ θ を用いて表せ．

(3)　曲線 C の概形を図示せよ．

【テーマ】：媒介変数表示された曲線の図示

方針

(1) での y 軸に関する対称性を証明するときは，θ の範囲が 0 を境に対称なので，$\theta \geqq 0$ と $\theta \leqq 0$ に分けて考えます．(2) は合成関数の微分を用います．(3) では，(1), (2) で求めた情報を基にして増減表をつくりグラフをかきます．

(1) から意外に難問という印象を持ったかもしれません．θ の値が 0 に関して対称である点に注目しましょう．$y=f(x)$ が y 軸に関して対称であることを証明するためには，$f(-x)=f(x)$ であることを証明すればよいことは知っているでしょう．本問のように θ が 0 を境に対称に与えられているときは，

$$x(-\theta)=-x(\theta)\ ,\ \ y(-\theta)=y(\theta)$$

を示します．

ポイント

y 軸に関する対称性は，$x(-\theta)=-x(\theta)$, $y(-\theta)=y(\theta)$ を示す．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$$C\ :\ \begin{cases} x(\theta)=\theta\cos\theta \\ y(\theta)=\theta\sin\theta \end{cases}\quad \text{とおく．}$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき，$\begin{cases} x(\theta)=\theta\cos\theta \\ y(\theta)=\theta\sin\theta \end{cases}$ に対して，$-\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq 0$ のとき，

$$\begin{cases} x(-\theta)=-\theta\cos(-\theta)=-\theta\cos\theta=-x(\theta) \\ y(-\theta)=-\theta\sin(-\theta)=\theta\sin\theta=y(\theta) \end{cases}$$

となるので，曲線 C は y 軸に関して対称であることが示された．　**(証明終)……(答)**

(2)　x, y をそれぞれ θ で微分すると，

$$\frac{dx}{d\theta}=\boldsymbol{\cos\theta-\theta\sin\theta}\cdots\cdots(\text{答})\quad ,\quad \frac{dy}{d\theta}=\boldsymbol{\sin\theta+\theta\cos\theta}\cdots\cdots(\text{答})$$

となるので,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\boldsymbol{\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) (1) より, C は y 軸に関して対称であるから, $0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ で考える. この範囲で $x=0$, $y=0$ となる θ の値は,

$$x=0 \text{ のとき},\quad \theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$
$$y=0 \text{ のとき},\quad \theta=0,\ \pi$$

である.

(i) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき,

$\frac{dy}{d\theta}>0$ である. ここで, $\frac{dx}{d\theta}=f(\theta)=\cos\theta-\theta\sin\theta$ とおくと,

$$f'(\theta)=-\sin\theta-\sin\theta-\theta\cos\theta<0$$

となるので, $f(\theta)$ は単調減少である. $f(0)=1>0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$ で $f(\theta)$ が連続関数であることから $f(\theta)=0$ となる θ の値がただ一つ存在する. その値を $\theta=\alpha$ とする.

(ii) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき,

$\frac{dx}{d\theta}<0$ である. ここで, $\frac{dy}{d\theta}=g(\theta)=\sin\theta+\theta\cos\theta$ とおくと,

$$g'(\theta)=\cos\theta+\cos\theta-\theta\sin\theta<0$$

となるので, $g(\theta)$ は単調減少である. $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, $g(\pi)=-\pi<0$ で $g(\theta)$ が連続関数であることから $g(\theta)=0$ となる θ の値がただ一つ存在する. その値を $\theta=\beta$ とする.

(iii) $\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ のとき,

$\frac{dy}{d\theta}<0$ である. ここで, $\frac{dx}{d\theta}=f(\theta)=\cos\theta-\theta\sin\theta$ とおくと,

$$f'(\theta)=-\sin\theta-\sin\theta-\theta\cos\theta>0$$

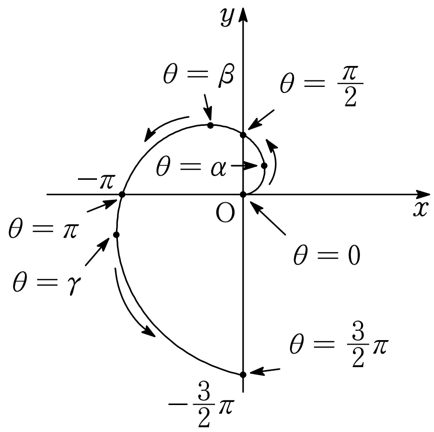
となるので, $f(\theta)$ は単調増加である. $f(\pi)=-1<0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi>0$ で $f(\theta)$ が連続関数であることから $f(\theta)=0$ となる θ の値がただ一つ存在する. その値を $\theta=\gamma$ とする.

以上 (i)〜(iii) より, $0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ での増減表は次のようになる.

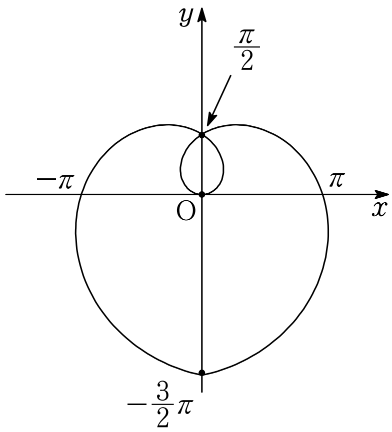
θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π	$\cdots$	γ	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\rightarrow$		$\leftarrow$	0	$\leftarrow$		$\leftarrow$	$-\pi$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
y	0	$\uparrow$		$\uparrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\uparrow$		$\downarrow$	0	$\downarrow$		$\downarrow$	$-\frac{3}{2}\pi$

よって, 曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ での概形は, 次の図1のようになるので, y 軸に関する対称性を考えて曲

線 C の概形は図２のようになる．



【図１】



【図２】

♢ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

媒介変数表示された関数のグラフをかくのは慣れていないと非常に大変な作業になり，思ったより時間がかかるでしょう．ポイントとしては，軸に関する対称性を発見するということです．これによって，ある程度増減表を縮小することができるのでグラフが非常にかきやすくなります．本問では，誘導していますが自分で対称性を発見できる訓練をしておきましょう．

媒介変数を用いると，このような（NTT のマークみたいでしょ！）面白い曲線をかくことができます．もっと神秘的な形をしたグラフもあるので，興味がある人は探してみてください．