31 【難易度】… やや難

n を自然数とする．

$$S_n = \frac{1^2}{\sqrt{1^3+1}} + \frac{2^2}{\sqrt{2^3+1}} + \frac{3^2}{\sqrt{3^3+1}} + \cdots\cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $x \geqq 1$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ は単調増加でかつ上に凸であることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) p を正の実数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ が収束するように p の値を定め，その極限値を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

(1) は素直に微分して $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ を示しましょう．(2) は置換積分を用いて定積分します．(3) は難問です．$\dfrac{S_n}{n^p}$ を計算したいのですが，実際に計算することができないので，不等式を用いて評価します．あとは，はさみうちの原理を用いて，収束するための p の条件を求めます．

(1), (2) は標準的な問題なので，完答したい問題です．本問は (3) をどのようにして解くかで悩むでしょう．まずは，形をみて区分求積法に気付いてほしいのですが，もしもそれに気付いたとしても収束条件まで持っていくにはかなりの経験と知識が必要です．この分野が頻出の大学を受験する人は，しっかりと復習をして，類題が解けるようになっておきましょう．

ポイント

和が求められないときは，区分求積法を利用してみる！

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^3+1} - x^2\cdot\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{x^3+1} \\
&= \frac{2x\sqrt{x^3+1} - \frac{3}{2}x^4\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} \\
&= \frac{2x(x^3+1) - \frac{3}{2}x^4}{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x^4+4x}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (\because\ x \geqq 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4x^3+4)(x^3+1)^{\frac{3}{2}}-(x^4+4x)\cdot\frac{3}{2}(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{2(x^3+1)^3}\\
&= \frac{4(x^3+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{2}x^3(x^3+4)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}{2(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\{8(x^3+1)^2-9x^3(x^3+4)\}}{4(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\{8(x^6+2x^3+1)-9x^6-36x^3\}}{4(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}(-x^6-20x^3+8)}{4(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\{-(x^3+10)^2+108\}}{4(x^3+1)^3}<0 \quad (\because\ x \geqq 1)
\end{aligned}
$$

ゆえに，$x \geqq 1$ のとき，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$ であるから，関数 $f(x)$ は $x \geqq 1$ で単調増加でかつ上に凸であることが示された． **(証明終)**……**(答)**

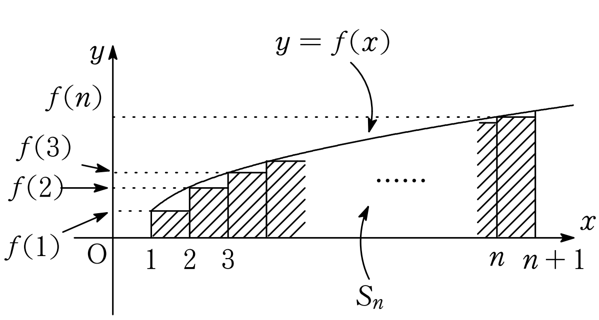
(2)　$x^3+1=t$ とおくと，$3x^2\,dx=dt$ であり，

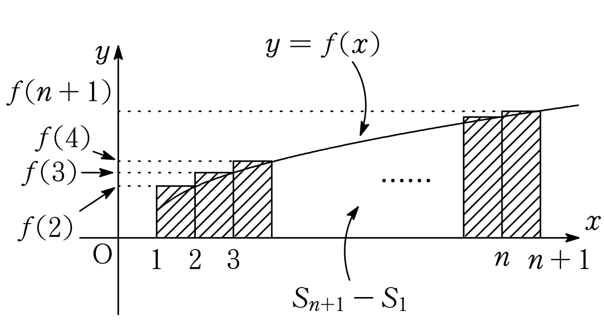
x	$1 \ \to \ n+1$
t	$2 \ \to \ (n+1)^3+1$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\int_1^{n+1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx &= \int_2^{(n+1)^3+1}\frac{1}{3\sqrt{t}}\,dt\\
&= \frac{1}{3}\int_2^{(n+1)^3+1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt\\
&= \frac{1}{3}\Big[\,2t^{\frac{1}{2}}\,\Big]_2^{(n+1)^3+1}\\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)}\text{……}\textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)　$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ であり，(1) より $x \geqq 1$ で $y=f(x)$ のグラフは単調増加でかつ上に凸であるから，S_n と $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ の関係は，次の 2 つのグラフから次のようになる．





$$
S_n<\int_1^{n+1} f(x)\,dx<S_{n+1}-S_1 \quad \text{……①}
$$

ここで，$S_{n+1}-S_1=S_n+\dfrac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^3+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，

$$①\iff\int_1^{n+1}f(x)\,dx-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}<S_n<\int_1^{n+1}f(x)\,dx$$

となるので，(2) の結果を用いると，

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}<S_n<\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)$$

$$\iff\frac{2}{3n^p}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)-\frac{(n+1)^2}{n^p\sqrt{(n+1)^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^p}<\frac{S_n}{n^p}<\frac{2}{3n^p}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)$$

$$\iff\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{\left(n^{\frac{2}{3}p+1}+n^{\frac{2}{3}p}\right)^3+n^{2p}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^p}$$

$$<\frac{S_n}{n^p}<\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)$$

と変形することができる．

ここで，

（ｉ） $p=\dfrac{3}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n^2+n)^3+n^3}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+n^3}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{n^2+2n+1}{n^3\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2}{3}$$

同様にすると，右辺は

$$(\text{右辺})=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}=\frac{2}{3}$$

よって，このとき，はさみうちの原理によって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ は収束し，その極限値は $\dfrac{2}{3}$ となる．

（ii） $p>\frac{3}{2}$ のとき，

（ i ）を踏まえて考えると，$n\to\infty$ のとき，

$$(\text{左辺})\to 0\ ,\ (\text{右辺})\to 0$$

となるので，はさみうちの原理によって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ は収束し，その極限値は 0 となる．

（iii） $0<p<\frac{3}{2}$ のとき，

（ i ）を踏まえて考えると，$n\to\infty$ のとき，

$$(\text{左辺})\to\infty$$

となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ は発散する．

以上より，求める p の値とその極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}=\begin{cases}\boldsymbol{\frac{2}{3}} & \left(\boldsymbol{p=\frac{3}{2}}\right)\\ \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{p>\frac{3}{2}}\right)\end{cases}\ \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇　♡

解説

解答がずいぶん長くなってしまいました…それでも前半は標準問題なので，半分は取れなければいけません．(3) では，(1) で証明したことを用いなければ議論が進まないことを理解してください．なぜなら，単調増加でかつ上に凸でなければ，解答のように S_n を評価できないからです．(**注** 必ず単調増加でかつ上に凸でなければならないわけではありません．単調性と凹凸を調べなければ不等式が立式できないということです．) このように区分求積法を用いる場合は，グラフの特徴を述べておくことは非常に重要なことなのです．また，解答中に出てくる場合分けについて，何でいきなり $p=\frac{3}{2}$ が出てくるの？って疑問を持つ人も少なくないでしょう．これには，次のことを理解しておく必要があります．

【無限大の強さ】

∞（無限大）は，非常に大きいという**状態を表す記号**です．しかし，同じ無限大でも，次の 2 つの無限大はちょっとイメージが違いますよね？

（ i ） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$　　　（ii） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^n=\infty$ （e は自然対数の底）

グラフをかいてみれば一目瞭然ですが，(i) は n を大きくしていくとゆっくりと無限大に近づくのに対して，(ii) は n を大きくしていくと，急激に無限大に近づきます．この感覚は極限の問題を解く上で非常に重要なものなのです．無限大の強弱はグラフを考えるとわかりやすく，次のようになります．

a を自然数とするとき，$n\to\infty$ に対して，

$$\underbrace{\log n}_{\text{対数}}\ll\underbrace{n^{\frac{1}{a}}\ll\cdots\ll n^{\frac{1}{2}}}_{\text{累乗}}\ll\underbrace{n\ll n^2\ll\cdots\ll n^a}_{\text{整式}}\ll\underbrace{2^n\ll 3^n\ll\cdots a^n}_{\text{指数}}\ll\underbrace{n!}_{\text{階乗}}$$

である．(ただし，$a\ll b$ は a が b よりも十分小さいことを表す．)

この無限大の強弱のイメージが掴めれば，極限の問題は簡単に答えが予想できます．例えば，次の例題で考えてみましょう．

例題

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x+1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\log x}$

無限大の強さに着目して見ましょう！

(1) $\dfrac{\text{弱い無限大}}{\text{強い無限大}}=0$ ☜ この場合は，分母が勝つので 0 になります．

(2) $\dfrac{\text{同程度の無限大}}{\text{同程度の無限大}}=\alpha$ ☜ この場合は，分母と分子の強さが同じレベルなので，ある値 α に収束します．

(3) $\dfrac{\text{強い無限大}}{\text{弱い無限大}}=\infty$ ☜ この場合は，分子が勝つので ∞ になります．

すなわち，収束するためには，分母の方が強い無限大であるか，分子と分母の無限大の強さが同程度でなければいけません．では，本問の解答に戻ってみましょう．

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{\left(n^{\frac{2}{3}p+1}+n^{\frac{2}{3}p}\right)^3+n^{2p}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^p}$$
$$<\frac{S_n}{n^p}<\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)$$

もちろん不定形の部分に着目します．左辺で不定形になっているのは，

$$\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3,\ \frac{(n+1)^2}{\sqrt{\left(n^{\frac{2}{3}p+1}+n^{\frac{2}{3}p}\right)^3+n^{2p}}}$$

の 2 箇所です．前者が収束するためには，分母の次数が分子の次数以上になればよいので，$p\geqq\dfrac{3}{2}$ ……① であることが分かります．後者は根号を含んでいるので，注意が必要です．

分子の次数は，2 で，分母の次数は，$\dfrac{2p+3}{2}$

です．したがって，分母の次数が分子の次数以上になるためには，

$$\frac{2p+3}{2}\geqq 2 \iff p\geqq\frac{1}{2}\ \cdots\cdots②$$

でなければなりません．①, ② を同時にみたすような p $\left(p\geqq\dfrac{3}{2}\right)$ であればよいので，$p=\dfrac{3}{2}$（同程度の無限大のとき）と $p>\dfrac{3}{2}$（分母の方が強い無限大のとき）で場合分けをする必要があったのです．
(3) の類題が，ありますので紹介しておきます．答えだけを載せておきます．

問題（'97　名古屋大）

正数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n$ をみたしているとする．数列 $\left\{\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ．また，収束する場合，その極限値を求めよ．

解：
$$\begin{cases}\text{収束する } r \text{ の範囲は，}\quad r\geqq\dfrac{3}{2}\\[2mm]\text{極限値は，}\begin{cases}r>\dfrac{3}{2}\text{ のとき，}\quad 0\\[1mm] r=\dfrac{3}{2}\text{ のとき，}\quad \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}\end{cases}$$