

23 ('05 名古屋女子大)

【難易度】… 標準

三角形 ABC があり、各辺の長さを $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 7$ とする。辺 AB 上に点 D, AC 上に点 E をとって、三角形 ADE を作る。三角形 ADE の面積が三角形 ABC の面積の $\frac{1}{3}$ であるとき、次の各問に答えよ。

- (1) 線分 AD と AE の長さの積を求めよ。
- (2) DE の最小値を求めよ。

【テーマ】: 三角形を二分する線分の最小値

方針

$AD = x$, $AE = y$ とおいて、面積の条件から xy を求めることができます。DE の最小値は、余弦定理を利用して、DE を xy で表すことから始めよう。

東京工業大学・京都大学など、様々な大学で類題が出題されています。それらの大学では、辺の長さに文字が入っていたりして、場合分けが必要になったりするものがあります。本問はその中でも一番易しいタイプです。比較的通しが見通しが立つので、解きやすい問題になっています。最小値は、相加平均・相乗平均の関係をうまく利用できるかどうかポイントになります。

ポイント

最大値・最小値は相加平均・相乗平均が利用できることがある

相加平均・相乗平均の関係が使える場面では、文字が 0 以上であることと、和と積の関係から最大値・最小値を求める。また、逆数の形があるなど、ある程度決まった状況が多いので、演習を通して経験しておくことが必要です。

解答

- (1) $AD = x$, $AE = y$ とおくと、

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin A$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \sin A$$

である。また、題意より $\triangle ABC = 3\triangle ADE$ であるから、

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \sin A = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin A \iff xy = 14 \dots \dots (\text{答}) \dots \dots \textcircled{1}$$

- (2) $\triangle ABC$ で余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} \\ &= \frac{60}{2 \cdot 6 \cdot 7} \\ &= \frac{5}{7} \dots \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\triangle ADE$ で余弦定理より、

$$\begin{aligned} DE^2 &= x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos A \\ &= x^2 + y^2 - 2 \cdot 14 \cdot \frac{5}{7} \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= x^2 + y^2 - 20 \end{aligned}$$

ここで, $x^2 > 0, y^2 > 0$ より, 相加平均・相乗平均の関係から,

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 28 \quad (\because \textcircled{1})$$

等号は, $x^2 = y^2$ すなわち $x = y = \sqrt{14}$ のとき成り立つ. ゆえに,

$$DE^2 \geq 28 - 20 = 8$$

$DE > 0$ であるから, $DE \geq 2\sqrt{2}$ である. ゆえに, DE の最小値は, $AD = AE = \sqrt{14}$ のとき, $2\sqrt{2} \cdots \cdots$ (答)

_____ ◇ _____ ♡ _____

解説

最大値・最小値を求める方法は, 様々な方法があります. 2 次関数であれば平方完成をすればいいし, 3 次関数以上なら微分して増減表を書けば求めることができます. 三角関数や指数関数・対数関数も置き換えなどを用いてやれば 2 次関数や 3 次関数に帰着できることが多々あります. しかし, それ以外にも分数の形をしたものや本問のように 2 変数のものなど様々なものがあります. それらについても最大値・最小値を求める手段はいろいろあるのです. その一つの方法が相加平均・相乗平均の関係です. シュワルツの不等式を用いる問題もあります. 最大値・最小値に関する問題は入試では頻出なので, より多くの経験を積んでおきましょう.