21 ('05　京都産業大)　【難易度】… やや難

座標空間に 4 点 A$(0,\ 1,\ -1)$, B$(1,\ 2,\ 0)$, C$(-1,\ 2a-2,\ 1)$, D$(b^2-2b+2,\ 0,\ 0)$ がある．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが垂直になる実数 a の値を求めよ．

(2)　(1) のとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な大きさ 1 のベクトルを 1 つ求めよ．

(3)　(1) のとき，四面体 ABCD の体積が最小となる実数 b の値を求めよ．また，そのときの体積を求めよ．

【テーマ】：正射影ベクトルの利用

方針

(2) で何を求めさせられているかに気付くことが解決への鍵となります．四面体の体積を計算する際，底面・高さをどのように捉えるかがポイントです．

正射影ベクトルを知らない人にとっては，(1), (2) で何を求めさせられているかが見えにくい問題でしょう．問題で何が問われているかが分かれば誘導されている気がしますが，そうでなければ，(1), (2) を (3) でどのように生かすかが分からず息詰まってしまいます．

2 つのベクトルにともに垂直なベクトルは，その 2 つのベクトルを含む平面に垂直なベクトルです．その平面上にある四面体の面を底面とみて高さをそれに垂直なベクトルを用いて求めるというのが本問の解決のポイントとなります．ここではその高さを正射影ベクトルを用いて求めてみましょう．正射影ベクトルについては，後でまとめておきます．

ポイント

正射影ベクトルを利用して四面体の高さを求める

♣ ♠

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 2a-3,\ 2)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \iff -1+2a-3+2=0 \iff \boldsymbol{a=1}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 2)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{e},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{e},\ |\vec{e}|=1$$

より，

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots\cdots① \\ -x-y+2z=0 & \cdots\cdots② \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

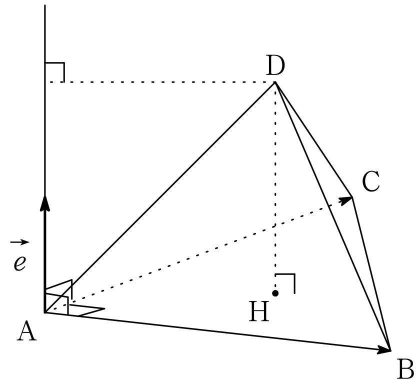
となる．① + ② より，$z=0$ を得る．これを ① に代入すると，$y=-x$ を得るので，③ から，

$$x^2+x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに，$y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (複号同順) を得る．したがって，求める単位ベクトルの一つは，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\quad\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\ \text{でも可}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　点 D から 3 点 A, B, C を含む平面に垂線を下ろし，その足を H とすると，△ABC の面積は一定であるから，体積が最小となるのは DH が最小となるときである．



$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right| &= \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}}{\left|\vec{e}\right|^2}\vec{e}\right| \quad ☞\boxed{解説}\\ &= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}\right|}{\left|\vec{e}\right|}\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(b^2-2b+2,\ -1,\ 1)$ であるから，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}\right| \quad (\because\ \left|\vec{e}\right|=1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|(b^2-2b+2,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ 0)\right|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|b^2-2b+3\right|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(b-1)^2+2\} \quad (\because\ (b-1)^2+2>0)\end{aligned}$$

ゆえに，$b=1$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|$ は最小値 $\sqrt{2}$ をとるので，このときの体積 V は，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\\ &= 1\end{aligned}$$

以上より，体積の最小値とそのときの b の値は，$\boldsymbol{b=1,\ V=1}$……(**答**)

◇　♡

$\boxed{解説}$

さまざまな計算テクニックが学べる問題です．(2) では，2 つのベクトルに垂直なベクトルを求める問題ですが，その際にちょっと面倒な連立方程式を解かなければいけません．本問のように簡単に求まる問題ならばそれほど大変ではないのですが，

$$\begin{cases}-2x+y-z=0\\ 3x+2y+2z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

のような形だとそれを解くだけでもちょっと大変です．しかし，この連立方程式を解く部分は省略しても減点されることはほとんどないでしょう．もちろん，きちんと連立方程式を解く過程を解答に書けば何の問題もないでしょうが，それだけで解答用紙の大半を使いかねません．そこで，このタイプの問題は，連立方程式を解いたと見せかけて，別の方法で答えを求めるということをしてみましょう！ただし，これから解説する方法は，『ベクトルの外積』というもので大学になって学習する内容ですから，大学受験をするにあたって解答に書くわけにはいきません．そこで，検算用ということで紹介します．

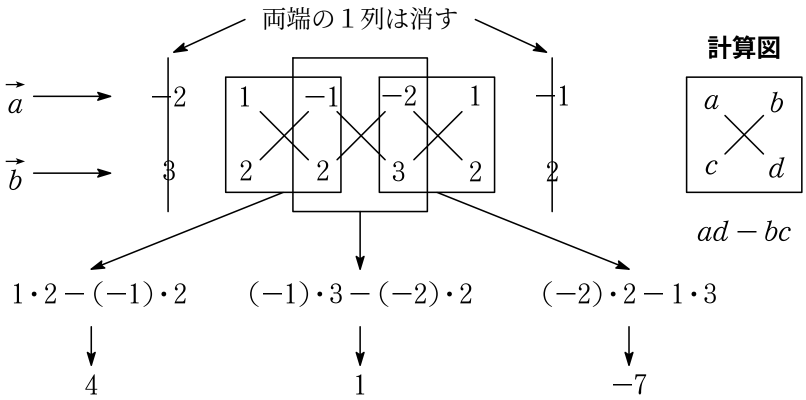
【２つのベクトルに垂直なベクトルの求め方（検算用）】

例題　2 つのベクトル $\vec{a}=(-2,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}=(3,\ 2,\ 2)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ.

$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とすると，題意から $\vec{a}\cdot\vec{e}=\vec{b}\cdot\vec{e}=0$, $|\vec{e}|=1$ が成り立つので,

$$(*)\quad \begin{cases} -2x+y-z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

では，この連立方程式を『ベクトルの外積』という方法を用いて解いてみましょう.



【手順】

（ｉ）$\vec{a}$, $\vec{b}$ の成分を上図のように 2 回ずつ横に並べて書きます.

（ii）両端の 1 列を消します.

（iii）真ん中に残った 8 個の数字を上図のように 4 つずつの数字の塊として 3 つに分けます.

（iv）上図の計算図にしたがって計算を行います.（数学 C の行列を学習している人は，行列式の計算と同じなので，覚えやすいでしょう.）

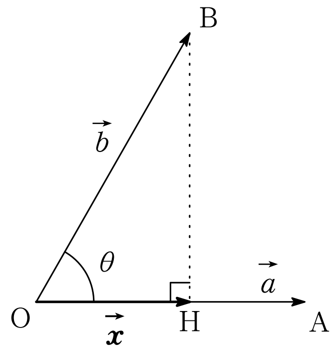
（ｖ）計算によって，得られた 3 つの値が求めたいベクトルに平行なベクトルの x, y, z 座標となっています.

ここで，得られたベクトルを $\vec{c}$ とすると，$\vec{c}=(4,\ 1,\ -7)$ というのは，$\vec{e}$ に平行なベクトルなので，$\vec{e}$ を求めるためには単位ベクトルにする必要があります．したがって，求める $\vec{e}$ は方向を考慮に入れれば,

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{66}}(4,\ 1,\ -7)$$

となりますから，連立方程式の解は，$(x,\ y,\ z)=\left(\pm\frac{4}{\sqrt{66}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{66}},\ \mp\frac{7}{\sqrt{66}}\right)$（複号同順）であることがわかります.

次は，正射影ベクトルについて説明しましょう．



右図のように，点 B から直線 OA 上に垂線 H を下ろしその足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{x}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影ベクトル**といいます．
このとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表してみましょう．そのためには，内積の図形的意味を理解しなければいけません．
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，$\vec{a}$ の大きさと $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル，すなわち $\vec{x}$ の大きさの積という形で定義されています．
$\mathrm{OH} = \mathrm{OB}\cos\theta$ ですから，$\mathrm{OH} = \left|\vec{b}\right|\cos\theta$ となります．
したがって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

となるわけです．
$\left|\vec{x}\right| = \left|\vec{b}\right|\cos\theta$ なので，$\vec{a}$ を単位ベクトルにして，$\left|\vec{x}\right|$ 倍すれば $\vec{x}$ になりますから，

$$\vec{x} = \left|\vec{b}\right|\cos\theta\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}$$

よって，

$$\left|\vec{x}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|^2}\left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

となります．

本問では，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の $\vec{e}$ への正射影ベクトルを考えて，それを高さとみて解答をしています．このことは知っているとかなり有効に使えますので，ベクトルが頻出の大学を受験予定の人は是非習得しておきましょう．