20 （'04　大阪府立大）　　**【難易度】**… 標準

k を自然数とする．次の連立不等式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を k で表せ．

$$\begin{cases} y \leqq \dfrac{x}{2} + k \\ y \geqq x - k^2 \\ x \geqq -k^2 - k \end{cases}$$

【テーマ】：格子点問題

方針

領域を図示して，y 軸に平行な直線上の点にある格子点の個数を求めます．後は，それを加えて，領域内の格子点の個数を計算します．

格子点に関する問題は頻出と言っても過言ではないでしょう．本問は領域が三角形になりますが，問題によっては放物線や指数関数が領域の境界になることもあるので，様々なタイプを演習しておくことを勧めます．

ポイント

軸に平行な直線上の格子点の数を求めて加える

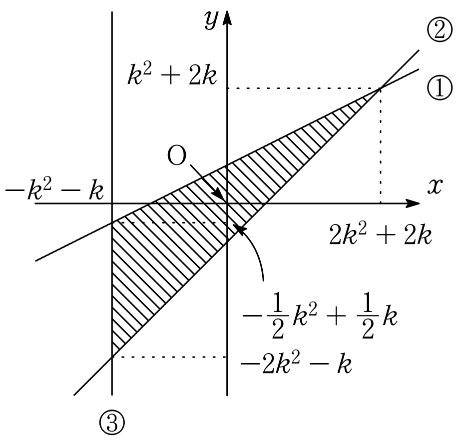
解答

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} + k & \cdots\cdots① \\ y = x - k^2 & \cdots\cdots② \\ x = -k^2 - k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

とおく．これらのうちの 2 直線の交点を求めると，次のようになる．

$$\begin{cases} ①,\ ② \text{ の交点} & (2k^2 + 2k,\ k^2 + 2k) \\ ②,\ ③ \text{ の交点} & (-k^2 - k,\ -2k^2 - k) \\ ③,\ ① \text{ の交点} & \left(-k^2 - k,\ -\dfrac{1}{2}k^2 + \dfrac{1}{2}k\right) \end{cases}$$

したがって，与えられた領域を図示すると，下図の斜線部分のようになる．（境界線上の点を含む）



ここで，$x = -k^2 - k$ 上には

$$-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k - (-2k^2 - k) + 1 = \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 \text{（個）}$$

の格子点が存在している．$N = \dfrac{3}{2}k^2 + \dfrac{3}{2}k + 1$ とおくと，① の傾きが 1 で，② の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であることから，

$$\begin{aligned} x &= -k^2 - k \text{ 上} & \cdots\cdots\quad & N \text{（個）} \\ x &= -k^2 - k + 1 \text{ 上} & \cdots\cdots\quad & N - 1 \text{（個）} \\ x &= -k^2 - k + 2 \text{ 上} & \cdots\cdots\quad & N - 1 \text{（個）} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$x = 2k^2 + 2 - 1$ 上　……　1（個）

$x = 2k^2 + 2k$ 上　　……　1（個）

のように 1, 2, ……$N-1$ がそれぞれ 2 個ずつ存在する．よって，求める格子点の個数は,

$$
\begin{aligned}
N + 2\{(N-1) + (N-2) + \cdots\cdots + 2 + 1\} &= N + 2 \cdot \frac{1}{2}N(N-1) \\
&= N^2 \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1\right)^2} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

である．

◇ ♡

解説

直線の方程式に k が使われているため，そのままでは式が複雑になってしまいます．解答をするときは，シンプルに計算を進めたほうが間違いが少なくてすむので，$N = \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$ とおきました．
今回は三角形領域ですが，問題によっては，曲線が絡むことがあります．また，三角形領域でも形が複雑（三角形の各辺が軸に対して平行や垂直でない場合）になると，計算が面倒になって計算間違いを起こしたりします．格子点問題が多く出題される大学を受験予定の人は，特に注意が必要です．