19 （'05　はこだて未来大）　　　　**【難易度】**… 標準

次の各問いに答えよ．

（1）　a を任意の実数とするとき，$y=x|a-x|$ のグラフをかけ．

（2）　$f(x)=\int_{-1}^{x} t|1-t|\,dt$ としたとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：定積分で表された関数

方針

a について場合分けをしてグラフをかきましょう．(2) は，$a=1$ のときなので，(1) でかいたグラフを参考にして定積分を計算します．ただし，x の値で再び場合分けが必要になります．

本問は，変数が 2 つもあるので，苦手な人が多いのが現状です．x と t があるので，わけがわからなくなるという意見が多いですね！ (2) だけが出題されることも多いので，自分で本問のように (1) を補ってやらなければいけません．積分変数が t なのですから，x は定数という気持ちで積分の計算をします．そうすれば，グラフから場合分けが必要であることはすぐに理解できるでしょう．

ポイント

積分変数に着目して積分するので，それ以外の文字は定数扱い！

♣ ♠

解答

(1)

（ｉ） $a>0$ のとき，

Ⓐ $x \geqq a$ のとき，
$y=x(x-a)$

Ⓑ $x<a$ のとき，
$y=x(a-x)$

（ii） $a=0$ のとき，

Ⓐ $x \geqq 0$ のとき，
$y=x^2$

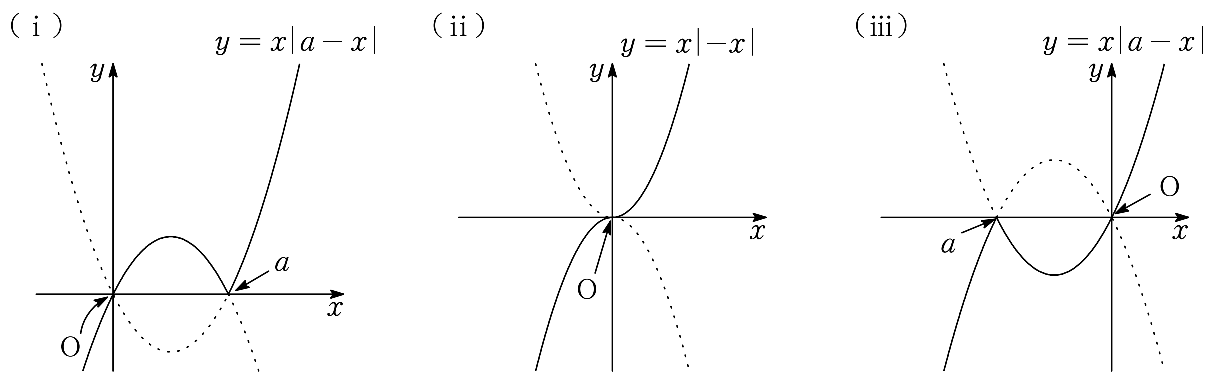
Ⓑ $x<0$ のとき，
$y=-x^2$

（iii） $a<0$ のとき，

Ⓐ $x \geqq a$ のとき，
$y=x(x-a)$

Ⓑ $x<a$ のとき，
$y=x(a-x)$

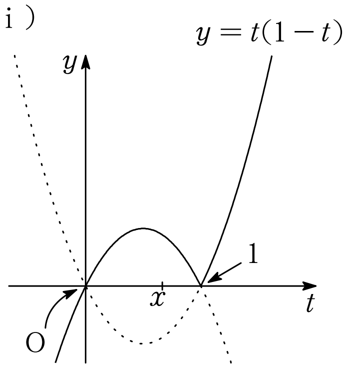
これより，それぞれのグラフは，次のようになる．



$a \geqq 0$　　　$a=0$　　　$a<0$

(2) (1) より，$y=t|1-t|$ のグラフは次のようになる．

（ｉ）



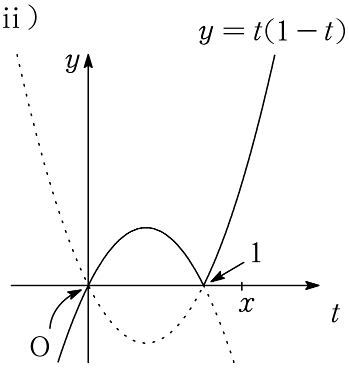
よって，

（ｉ） $x<1$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{x} t(1-t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (t-t^2)\,dt \\ &= \left[\ \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\ \right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6} \end{aligned}$$

（ii） $x \geqq 1$ のとき，

（ii）



$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{1} t(1-t)\,dt+\int_{1}^{x} t(1-t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (t-t^2)\,dt+\int_{1}^{x} (t^2-t)\,dt \\ &= -2\int_{0}^{1} t^2\,dt+\left[\ \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\ \right]_{1}^{x} \\ &= -2\left[\ \frac{1}{3}t^3\ \right]_{0}^{1}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

（ｉ）のとき，$f'(x)=-x^2+x$ であるから，$f'(x)=0$ のとき，$x=0$ である．
（ii）のとき，$f'(x)=x^2-x$ であるから，$f'(x)=0$ のとき，$x=1$ である．
よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{6}$	$\nearrow$		$\nearrow$

ゆえに，$x=0$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\frac{5}{6}}$……(**答**) をとる．

◇ ♡

解説

本問のように被積分関数が絶対値を含んでいるときは，被積分関数のグラフをかくことが大切です．本文では，被積分関数に x を含んでいないので，そんなに難しくありませんが，もしも被積分関数に x を含んでいる場合は，x を定数という扱いでグラフを考えましょう．((1) での a と同じように考えるということです．)

本問で勘違いしてほしくないのは，$f(x)$ は面積を表しているというわけではないことです．したがって，定積分の計算をする際に $x=0$ で積分区間を分ける必要はありません．したがって，最小値が負の数になることもあるのです．積分 = 面積という安直な考えはときに，思わぬ誤解を招くので十分に注意しましょう．