18 （オリジナル問題）　**【難易度】**… 標準

準線が $x=-p$，焦点が $\mathrm{F}(p,\ 0)$ の放物線 C がある．C 上の点 A から準線に垂線をおろしその足を H とする．このとき，点 A における接線と ∠HAF の二等分線とは一致することを示せ．

【テーマ】：放物線の接線と二等分線

方針

∠HAF の二等分線をどのように求めるかが鍵となる．通る点はわかっているので，傾きに着目したい．

点 A における接線の方程式は容易に求められるはずであるが，二等分線をどのように求めるかがポイント！方針 にも書いたように傾きに着目しよう．接線と x 軸のなす角を θ とおくと，二等分線と x 軸のなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ となります．

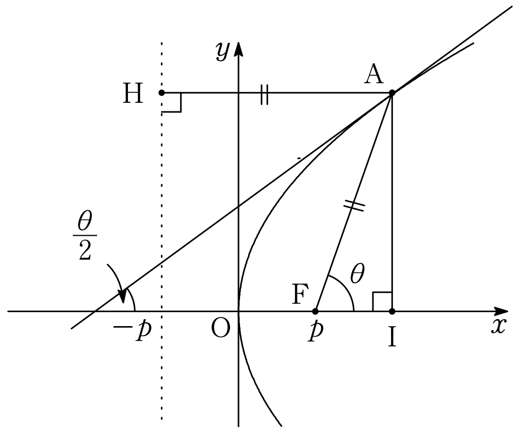
ポイント

二等分線の方程式は，傾きに着目！

♣　♠

解答

【証明】



∠HAF の二等分線を l，点 A における接線を m とする．
点 A から x 軸に垂線を下ろしその足を I とする．
$\angle\mathrm{AFI}=\theta$ とおくとき，l と x 軸とのなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ となる．
ここで，点 A を第 1 象限にとっても一般性は失わないので，
$\mathrm{A}(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$ とおくと，

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

であり，△AFI において，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{AF}}=\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{AH}}=\frac{a-p}{a+p}$$

したがって，

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\dfrac{a-p}{a+p}}{1+\dfrac{a-p}{a+p}}=\frac{a+p-(a-p)}{a+p+a-p}=\frac{p}{a}\iff\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{p}{a}}\quad\left(\because\ \tan\frac{\theta}{2}>0\right)$$

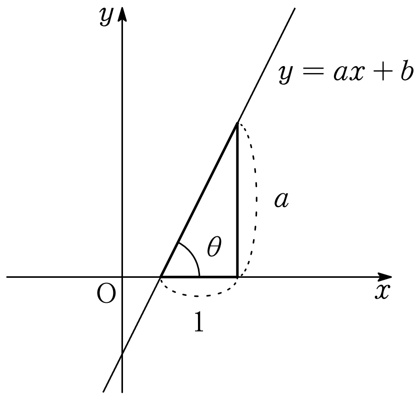
よって，直線 l の傾きは，$\sqrt{\dfrac{p}{a}}$ である．C の方程式は $y^2=4px$ であるから，

$$2yy'=4p\iff y'=\frac{2p}{y}=\frac{2p}{\pm\sqrt{4px}}=\pm\sqrt{\frac{4p^2}{4px}}=\pm\sqrt{\frac{p}{x}}$$

であり，点 A が第 1 象限にあることから直線 m の傾きは，$\sqrt{\dfrac{p}{a}}$ である．

ゆえに，$l,\ m$ の傾きが一致しどちらも点 A を通るので，$l,\ m$ は一致することが示された．**(証明終)……(答)**

◇ ♡



解説

直線の傾きは，tan を用いて表すことができます．
直線 $y = ax + b$ と x 軸のなす角を θ とすると，

$$\tan\theta = a$$

が成り立つことは，知っているでしょう．
よく使う式ですから，しっかりと覚えておきましょう．
本問の結果は，おもしろい結果だと思いませんか？そう思うのは私だけ!?