16　　【難易度】… 標準

3 つのポール A, B, C があり，いまポール A にすべて半径の異なっている n 枚の円盤が半径の大きいものから順にささっている．この円盤を次の規則に従って移動させ，最終的に B, C のどちらかにいまと同じような状態になるように移動させる．

- **規則 1** ： 小さい円盤の上に大きい円盤をのせることはできない．
- **規則 2** ： 1 回の移動では 1 枚の円盤しか動かすことはできない．
- **規則 3** ： 移動の際は A, B, C の 3 つのポールすべてを使用してよい．

このとき，n 枚の円盤すべてを B, C のどちらかにいまと同じような状態になるように移動させるためには最低何回円盤を移動させないといけないかを n の式で表せ．

【テーマ】：隣接 2 項間漸化式

方針

① n 枚のときに移動させた最低回数を a_n とおいて，数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式を立式する．
② n 枚のときに移動させた最低回数を a_n とおいて，$n = 1, 2, 3$ から a_n を類推しそれを数学的帰納法で証明する．

この問題は，『ハノイの塔』と呼ばれる有名な問題です．解き方は 方針 でも示したように，漸化式を立式するか類推して数学的帰納法で証明するかの 2 通りが考えられるでしょう．

ポイント

n 回目の状況を知るためには漸化式を立式すると簡単に求まることがある

問題文から漸化式を立式すれば簡単だ！と気付くには経験が必要です．「こういう問題には漸化式」というほど単純ではありません．経験を積むことで問題を読んだときに漸化式を立式すればよいということに次第に気付けるようになるでしょう．

♣　♠

解答

n 枚のときに移動させた最低回数を a_n とおく．
$n = 1$ のとき，1 回の移動で条件をみたすので，$a_1 = 1$ である．
$n+1$ 枚のとき，まずこれら $n+1$ 枚の円盤が A にささっているとしても一般性を失わない．上の n 枚を a_n 回でポール B に移動し，次に $n+1$ 枚目の円盤をポール C に移動し，最後にポール B にささっている n 枚をポール C へ移動すればよい．よって，

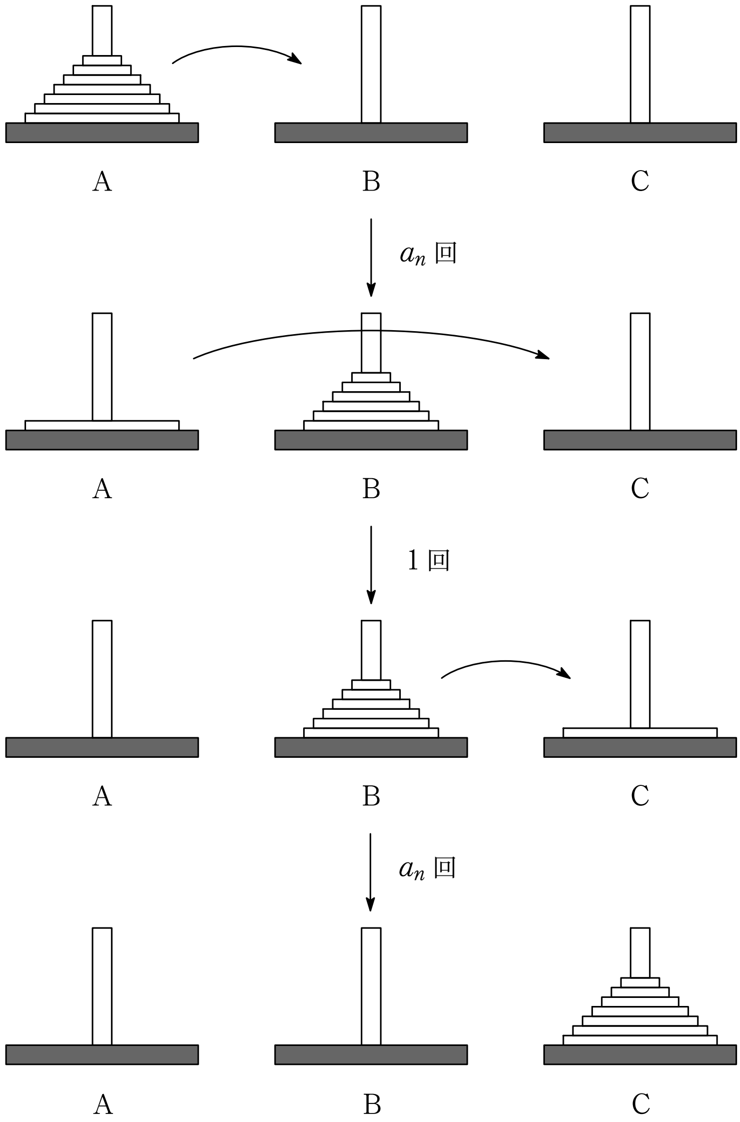
$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n \iff a_{n+1} = 2a_n + 1$$ ☞ **図を参照**

が成り立つ．これを式変形すると，

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \iff a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

となることから，数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$，公比 2 の等比数列である．ゆえに，

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} \iff \boldsymbol{a_n = 2^n - 1} \cdots\cdots(\text{答})$$



別解

本問では，a_1, a_2, a_3 を求めて a_n を類推することもできます．しかし，それはあくまで予想なので数学的帰納法で証明しなければいけません．

はじめに円盤がささっているのはポール A であるとする．円盤を半径の小さいものから C_1, C_2, C_3 とする．

$n=1$ のとき，ポール B へ移せばよいので，$a_1=1$ である．

$n=2$ のとき，ポール B へ C_1 を移し，ポール C へ C_2 を移し，ポール B にある C_1 をポール C に移せばよいので，$a_2=3$ である．

$n=3$ のとき，同様にすると，$a_3=7$ となることから，

$$a_n=2^n-1$$

であると類推できる．これを数学的帰納法で示す．

【証明】

(i) $n=1$ のとき，

明らかに成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，

$a_k=2^k-1$ であると仮定すると，

$n=k+1$ のとき，

k 枚の円盤をポール B に移し，$k+1$ 枚目の円盤をポール C に移し，さらにポール B にある k 枚の円盤をポ

ール C に移せばよいので,

$$a_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

となるので, $n = k + 1$ のときも成り立つ.
ゆえに,(ｉ),(ii)より, すべての自然数 n に対して, $a_n = 2^n - 1$ であることが示された. **(証明終)**……(**答**)

◊ ♡

解説

2 通りの解法を示しましたが, 解答 と 別解 を見比べてもらえばわかるように, 結局同じことをしています. つまり, 本問の解法のポイントは「 n 枚の円盤をまとめて動かす」というところにあります. 解答 はそれが何回かかるかわからないので, a_n とし, 別解 はそれが $2^n - 1$ 回であろうという類推の元で計算しているのです. したがって, 2 つの解法は本質的には同じことをしているのがわかると思います.

参考

ここで, もしも $n = 30$ だったとしましょう. つまり, 円盤が 30 枚あったとします. 規則を守ってこの円盤を移動させたらいったいどのくらいの回数と時間がかかるのでしょうか?

$$n = 30 \text{ ですから, } a_{30} = 2^{30} - 1 = 1073741823$$

となります. つまり, 移動回数は 10 億 7374 万 1823 回になってしまいます. もし 1 秒間に 1 枚の円盤を動かすことになれば, 1 年 (365 日) が 3153 万 6000 秒ですから,

$$1073741823 \div 31536000 = 34.048\cdots\cdots$$

となることからなんと 34 年以上もかかってしまいます. たった 30 枚の円盤でこんなに暇つぶしができるとは…恐るべしハノイの塔…