13 （オリジナル問題） **【難易度】…** |標準|

a を実数とするとき，対数方程式 $\log_2(x-1)^2+\log_{\sqrt{2}}x=2a$ の実数解の個数を求めよ．

【テーマ】：対数方程式の実数解の個数

方針

まずは真数条件でしょう．次に対数の底を揃えて式を簡単な形に変形します．ただし，式変形に要注意！あとは，グラフの交点が実数解の個数と等しいということを用いればよいですね．

なにげなくやってしまいがちな式変形ですが，次の式変形は間違っています．

$$\log x^2=2\log x$$

なにが違うのかわかりますか？では左辺と右辺で別々に真数条件を考えてみましょう！

$$\text{左辺の真数条件：}\quad x^2>0 \iff x\neq 0$$
$$\text{右辺の真数条件：}\quad x>0$$

左辺と右辺で真数条件が異なってしまいます．それにもかかわらず式が等しいって変ですよね？本問の落とし穴はここにあります．次のように変形するのが正確な式変形です．

$$\log x^2=2\log|x|$$

そうです！絶対値がつくんです！今までなにげなく式変形していたものもよく考えなければこのような落とし穴にはまってしまいますので，十分に注意してください．

ポイント

$$\log x^2=2\log|\boldsymbol{x}|$$

解答

真数条件より，

$$(x-1)^2>0 \text{ かつ } x>0 \iff x\neq 1,\ x>0 \cdots\cdots①$$

与えられた方程式を変形すると，

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)^2+\log_2 x^2=2a &\iff \log_2|x-1|+\log_2 x=a\\ &\iff \log_2 x|x-1|=\log_2 2^a\\ &\iff x|x-1|=2^a\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=x|x-1|$ とおくと，$y=f(x)$ と $y=2^a$ の交点の個数を調べればよい．

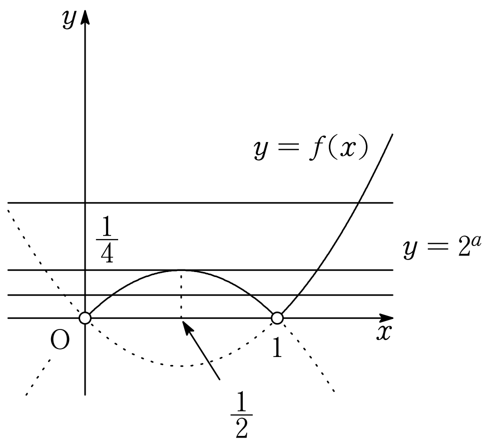
$$\begin{cases} f(x)=-x(x-1) & (0<x<1)\\ f(x)=x(x-1) & (x>1)\end{cases}$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．

(ｉ) $2^a > \frac{1}{4}$ すなわち $a > -2$ のとき，
交点は 1 個であるから，実数解の個数は 1 個．

(ii) $2^a = \frac{1}{4}$ すなわち $a = -2$ のとき，
交点は 2 個であるから，実数解の個数は 2 個．

(iii) $2^a < \frac{1}{4}$ すなわち $a < -2$ のとき，
交点は 3 個であるから，実数解の個数は 3 個．



ゆえに，求める実数解の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > -2} \textbf{ のとき，} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = -2} \textbf{ のとき，} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a < -2} \textbf{ のとき，} & \textbf{3 個} \end{cases}$$ ……(答)

◇　♡

解説

対数方程式を式変形して，2 次方程式の実数解の個数問題に帰着させる典型的な問題ですが，前述の通り式変形に落とし穴があります．多くの人が絶対値を忘れて崩壊しているのではないでしょうか？対数関数や対数方程式を式変形する上で非常に使える公式がありますので，紹介しておきます．知らなかった人は必ずマスターしておきましょう！

公 式　**底の変換**

みなさんがよく知っている底の変換公式は，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c \neq 1)$$

ですよね？これを毎回使っていたのでは式変形をするのに時間と手間がかかってしまいます．そこで次の公式を挙げておきます．　$a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ b \neq 1,\ c>0$ とし，p を実数とする．

(ｉ) $\log_a b = \log_{a^p} b^p$　　(ii) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$　　(iii) $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

特に(ｉ)は式変形で重宝すること間違いありません．本問でも式変形の際に利用しています．簡単な例を挙げておきます．

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \log_{(\sqrt{2})^2} 3^2 = \log_2 3^2 \quad (p = 2 \text{ として計算しています．})$$

つまり，底を p 乗したら真数も p 乗すればよいのです．センター試験にしても，2 次試験にしても大抵この公式を用いれば底は揃えられます．ただし，にわか仕込みでは失敗する人も多いので，十分な練習を積んでおいてください．