6 （'00　津田塾大） 【難易度】… 基本

x についての方程式 $9^x+2a\cdot 3^x+2a^2+a-6=0$ が正の解，負の解を 1 つずつもつとき，定数 a の値のとる範囲を求めよ．

【テーマ】：問題文の同値変形

方針

まず $3^x=t$ とおくことに気付くでしょう．そして置き換えした文字の範囲を求めることも基本問題です．あとは正の解と負の解という部分を置き換えした文字に適用するとどのようになるかを考えましょう．

問題文の同値変形とは，与えられた問題が複雑であったり，理解するのが困難であるとき，置き換えなどの手法を用いて問題を簡略化することをいいます．つまり，本問では，与えられた指数関数を $3^x=t$ と置くことによって 2 次関数にすれば，これまで学習してきたことを用いて解答できるじゃないか！という発想で置き換えをするのです．しかし，『置き換えしたら範囲変更！』すなわち新しい変数 t の範囲を求める必要があります．それと同時に問題文にある正の解・負の解というのも言い換えなければいけません．なぜならこの正の解・負の解というのは x の値のことであり t の値ではないからです．実際にこれを解いてもらうと，混乱してここで間違えてしまう人がいるんです．

ポイント

問題の同値変形が問題文を簡略化する

♣ ♠

解答 $3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，与えられた方程式を式変形すると，

$$t^2+2at+2a^2+a-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

となる．与えられた方程式が正の解，負の解を 1 つずつもつためには，① の 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき，

$$0<\alpha<1<\beta$$

となればよいので，

$$f(t)=t^2+2at+2a^2+a-6$$

とおくと，$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ であればよい．

$f(0)>0$ のとき，　$2a^2+a-6>0 \iff (2a-3)(a+2)>0$

$$\therefore\quad a<-2,\ \frac{3}{2}<a \quad \cdots\cdots ②$$

$f(1)<0$ のとき，　$1+2a+2a^2+a-6<0 \iff (a-1)(2a+5)<0$

$$\therefore\quad -\frac{5}{2}<a<1 \quad \cdots\cdots ③$$

ゆえに，②, ③ より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2}<a<-2}\cdots\cdots\text{（答）}$$

♢ ♡

解説

$3^x=t$ とおくとき，x が正ならば $t>1$ で，x が負ならば $0<t<1$ であることがちゃんと理解できているかがポイントです．基本的な同値変形の問題ですから類題が出ても完答できるようにしておきましょう！