4 （オリジナル問題）　**【難易度】**… 理系（標準）・文系（やや難）

xy 平面上に原点を中心とし半径 1 の円 C がある．C 上に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{C}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる．ただし，$0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形であるとするとき，次の問いに答えよ．

（1）　α，β の関係式を求め，α の取り得る値の範囲を求めよ．

（2）　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を α を用いて表せ．

（3）　S の最大値とそのときの α，β の値を求めよ．

【テーマ】：複雑な関数の最大値の求め方

方針

問題文中に具体的な座標が与えられているので，面積公式を知っていれば S を求めるところまではそれほど難問ではない．問題は，S の最大値をどのようにして求めるかである．理系の人で，数学 III を学習しているならばいたって標準的な問題であるが，文系の人やまだ数学 III を学習していない人には，非常に難しく感じるだろう．解法のポイントは S^2 を計算することにある！

こんな問題に出くわしたことはないだろうか？

問題：$\vec{a}=(0,\ 2),\ \vec{b}=(2,\ t)$ のとき，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ とする．$\left|\vec{c}\right|$ の最小値を求めよ．

この問題は，$\vec{c}$ を成分で表してからその大きさを計算すると，

$$\vec{c}=(2,\ t+2)\ \text{より，}\ \left|\vec{c}\right|=\sqrt{2^2+(t+2)^2}=\sqrt{(t+2)^2+4}$$

となるので，$\left|\vec{c}\right|^2$ を考えて（または根号内だけに着目して）その最小値は 4 となるので，$\left|\vec{c}\right|$ の最小値は 2 である．という具合に計算したはずである．出てきた値の最小値や最大値が求められないときは 2 乗してみるのもひとつの解決策であることを知っておいてください．

ポイント

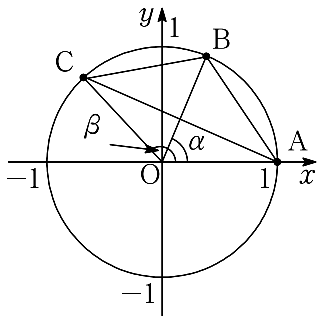
そのままの形で最大値・最小値が求まらないときは２乗してみよ！

ただし，いつもうまくいくとは限らないので，「あくまでそのような方法があるということを認知しておいてください．」ということです．

♣　♠

解答

（1）　$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OBC}$ において，題意より，



$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}\ ,\ \ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$$

であるから，$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{OBC}$ である．

ゆえに，$\boldsymbol{\beta=2\alpha}$……**（答）**

また，$0<\beta<2\pi$ であるから，

$0<2\alpha<2\pi$ より，$\boldsymbol{0<\alpha<\pi}$……**（答）**

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

別解

中心角と円周角の関係を使っても解答することができます．
題意から $\triangle$ABC は AB = BC の二等辺三角形であるから，$\angle$BAC = $\angle$BCA である．したがって，円周角と中心角の関係から $\angle$AOB = $\angle$BOC = α となるので，$\beta = 2\alpha$ となる．（以下，解答と同じなので略）

（2）　3 点 A, B, C をそれぞれ x 軸方向に -1 平行移動した後の点をそれぞれ A′, B′, C′ とすると，

$$\mathrm{A}'(0,\,0)\,,\ \mathrm{B}'(\cos\alpha-1,\,\sin\alpha)\,,\ \mathrm{C}'(\cos\beta-1,\,\sin\beta)$$

である．よって，求める面積 S は，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|(\cos\alpha-1)\cdot\sin\beta-\sin\alpha\cdot(\cos\beta-1)\right| && ☞\ \boxed{公式}\\
&= \frac{1}{2}\left|(\cos\alpha-1)\cdot\sin 2\alpha-\sin\alpha\cdot(\cos 2\alpha-1)\right| && (\because\ \beta=2\alpha)\\
&= \frac{1}{2}\sin\alpha\left|(\cos\alpha-1)\cdot 2\cos\alpha-(2\cos^2\alpha-2)\right| && (\because\ \sin\alpha>0)\\
&= \sin\alpha(1-\cos\alpha)\left|\cos\alpha-(\cos\alpha+1)\right| && (\because\ 1-\cos\alpha>0)\\
&= \boldsymbol{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

別解

ベクトルを利用しても解答することができます．
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(1-\cos\alpha,\,-\sin\alpha)$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$$

また，$\angle$AOC = $2\pi-2\alpha$ より，$\angle$ABC = $\pi-\alpha$ である．よって，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}\\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\sin(\pi-\alpha) && (\because\ \mathrm{BA}=\mathrm{BC})\\
&= \frac{1}{2}(2-2\cos\alpha)\sin\alpha\\
&= \boldsymbol{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

（3）（2）より，$S^2=\sin^2\alpha(1-\cos\alpha)^2$ となるので，$\cos\alpha=t$ とおくと，$-1<t<1$ で，

$$S^2=(1-t^2)(1-t)^2=(1-t^2)(1-2t+t^2)=-t^4+2t^3-2t+1$$

よって，$f(t)=-t^4+2t^3-2t+1$ とおくと，

$$f'(t)=-4t^3+6t^2-2=-2(t-1)^2(2t+1)$$

$f'(t)=0$ のとき，$-1<t<1$ をみたすものは，$t=-\dfrac{1}{2}$ であるから，増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	

ゆえに，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(t)$ は最大値 $\dfrac{27}{16}$ をとるので，

$$t=-\frac{1}{2}\ のとき,\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}\ より,\ \alpha=\frac{2}{3}\pi\ であるから,\ \beta=2\alpha=\frac{4}{3}\pi$$

また，最大値は，$S^2=\dfrac{27}{16}$ であるから，$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ $(\because\ S>0)$

したがって，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta=\dfrac{4}{3}\pi}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．……(**答**)

別解

数学 Ⅲ の微分を用いれば計算はもっと容易になる．

(2) より，$S=\sin\alpha(1-\cos\alpha)$ であるから，両辺を α で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\alpha} &= \cos\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha\cdot\sin\alpha\\ &= \cos\alpha-\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha\\ &= -2\cos^2\alpha+\cos\alpha+1\\ &= -(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dS}{d\alpha}=0$ となるのは，$0<\alpha<\pi$ において，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ すなわち，$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ のときのみで，このときの増減表は次のようになる．

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dS}{d\alpha}$		$+$	0	$-$	
S		↗	極大値	↘	

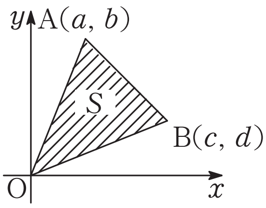
ゆえに，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{3}\pi}$ ，$\boldsymbol{\beta=\dfrac{4}{3}\pi}$ のとき，最大値 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．……(**答**)

◇　♡

公式　座標平面上に 3 点 O(0, 0)，A(a, b)，B(c, d) があるとき，△OAB の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

で与えられる．



：本問のように 3 点のいずれも原点に無い場合は，次のようにベクトルを用いることでこの公式が利用できる．

3 点 A(a, b)，B(c, d)，C(e, f) があるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(e-a,\ f-b)\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(c-a,\ d-b)$$

を考えることで，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|(e-a)(d-b)-(f-b)(c-a)\right|$$

で与えられる．

解説

解答にもいくつか記しましたが，この問題には様々な解き方があります．問題を様々な視点から見て解くことが数学の力を向上させるということを知っておいてください．そして，思いつく限りの別解を考えてみてください．なぜなら，ある問題に対して 2 つの解法 (A, B) を知っているとしましょう．問題の設定によっては，解法 A の方が楽に解けるときと，解法 B の方が楽に解けるときがあるからです．そして，場合によっては，解法 A では解けるが解

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

法 B では事実上解答するのが困難であるという場合もあります．つまり，保険をかけておくという意味でも様々な解法を知っておくことは大切なのです．
さて，本問の (1) については単純な図形の問題なので完答できなければいけません．(2) は公式を知っていれば後は三角関数の計算問題ですね．問題は (3) です．$S=\sin\alpha(1-\cos\alpha)$ の最大値を数学 Ⅲ を用いずに求めるにはどうすればよいでしょうか？このままでは，どうしようもないので 方針 でも述べたように S^2 を計算してみます．すると，S^2 が $\cos\alpha$ だけで表せるようになりますからあとは置き換えをして数学 Ⅱ の微分を用いて最大値を求めることができます．もちろん置き換えをしているので，t の範囲を求めることを忘れてはいけません．

参考
(3) の S の最大値はある程度予想することができます．円に内接する三角形の面積が最大となるのは正三角形となるときであるというのは，大体予想できるはずですから点 A が固定されていることと，(1) での α,β の関係から考えるとちょうど正三角形になるような α があることに気付きます．つまり (3) の計算方法がわからなくても最大値を予想することは可能なのです．しかし，これはあくまで予想！これを答えにしても点はもらえないことは覚悟しておきましょう．
このように答えが予想できる問題はあらかじめ予想しておく癖をつけておくとよいでしょう．なぜならそこから解答の方針が見えてくることがありますし，また出てきた答えが正しいか間違っているかの検討がつくからです．