1 ('05 一橋大) 【難易度】… 標準

P は x 軸上の点で x 座標が正であり，Q は y 軸上の点で y 座標が正である．直線 PQ は原点 O を中心とする半径 1 の円に接している．また，a, b は正の定数とする．P, Q を動かすとき，$a\mathrm{OP}^2 + b\mathrm{OQ}^2$ の最小値を a, b で表せ．

【テーマ】：座標設定の仕方

方針

問題文中に具体的な座標が与えられていないので，自分で設定しないといけません．しかし，その設定の仕方こそがこの問題の大きな鍵となるのです．様々な設定が考えられます．

（i） $\mathrm{R}(s, t)$ とおいて，点 R における接線を求めれば，P, Q の座標が s, t で表せるので，そこから $a\mathrm{OP}^2 + b\mathrm{OQ}^2$ を計算する．ただし，このままでは，2 変数 (s, t) であるため，点 R が円上の点であることを利用して，$s^2 + t^2 = 1$ という式を利用しなければならない．

（ii）（i）では 2 変数になるので，それを避けるため，$\mathrm{R}(\cos\theta, \sin\theta)$ とおき，これを利用して，$a\mathrm{OP}^2 + b\mathrm{OQ}^2$ を θ のみの式で表す．

（i）の解法は計算が大変なので，苦労する場合が多いですが，この方法しか知らない受験生も多く，計算量の多さでやられてしまう人が多々います．本問で学習してほしい事柄は，**座標設定を的確に行えば計算量を減らすことができる**ということです．次の**ポイント**を押さえておきましょう．

ポイント

円上の点は θ を用いて表す（θ の範囲も忘れずに！）

座標設定の方法は，みなさんもよく知っている次の公式に由来します．

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\ ,\quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

例をいくつか挙げておきましょう．

【例】

(1) 中心 (a, b)，半径 r の円：$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ のときは，

$$x = r\cos\theta + a\ ,\quad y = r\sin\theta + b$$

とおきます．$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ が成り立つように，$x - a = r\cos\theta$, $y - b = r\sin\theta$ とおくことで得られます．

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のときは，

$$x = a\cos\theta\ ,\quad y = b\sin\theta$$

とおきます．楕円は理系の人がメインになりますが，変形の仕方は円のときと同じです．

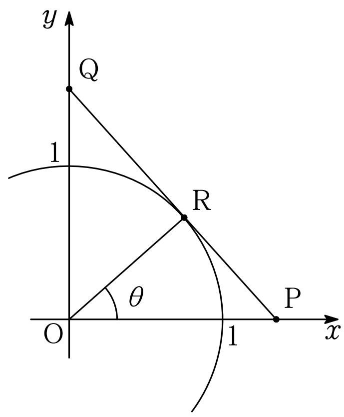
(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のときは，

$$x = \frac{a}{\cos\theta}\ ,\quad y = b\tan\theta$$

とおきます．これは，式を一度 $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2}$ と変形して，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いることで得られます．

これらの式変形は，暗記するのではなく自分で考えながら求める練習をしてください．そうしないと，式が少し変わっただけでお手上げになってしまう可能性があります．

解答



直線 PQ と円の接点を R とする．∠ROP $=\theta$ とすると，
OR $=1$ より

$$\mathrm{OP}=\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ \mathrm{OQ}=\frac{1}{\sin\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2 &= \frac{a}{\cos^2\theta}+\frac{b}{\sin^2\theta} \\ &= a(1+\tan^2\theta)+b\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right) \\ &= a+b+a\tan^2\theta+\frac{b}{\tan^2\theta}\ \cdots\cdots① \end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan^2\theta>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$a\tan^2\theta+\frac{b}{\tan^2\theta}\geqq 2\sqrt{a\tan^2\theta\cdot\frac{b}{\tan^2\theta}}=2\sqrt{ab}\ \cdots\cdots②$$

等号は，$a\tan^2\theta=\dfrac{b}{\tan^2\theta}$ すなわち $\tan\theta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$ のとき，成立する．
ゆえに，①, ② より，

$$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2\geqq a+b+2\sqrt{ab}$$

となるので，求める最小値は $\boldsymbol{a+b+2\sqrt{ab}}$……**(答)**（$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ としても可）

解説

座標設定ができて θ の式で表すことができれば後は三角関数の問題になります．ただし，θ の範囲を忘れずに！
この問題では，$\tan\theta>0$ となることがポイントですね！逆数が出てくるので，当然…**相加平均・相乗平均の関係**…を用いて最小値を求めます．理系の人は，微分に走らないように！！（数学 III の微分が得意な人によくある傾向です．）
文系の人は，最大値・最小値を求める際に分数関数が出てきたらこの『**相加平均・相乗平均の関係**』が使えるかどうかを考える癖をつけておきましょう！頻出です！！