直線・曲線の通過領域問題

今回は，定数を含んだ直線や曲線が定数の値を色々変えることで通過する領域を求める問題を扱います．とは言ってもやったことがない人にとってみれば何言ってるかもよく分からないかもしれません．よく見かける問題なのですが，対策ができていない人や 1 度はやったことあるけど，よくわからないという人が多いと思います．ここで，しっかりと自分のものにしてしまいましょう！では，まず簡単な例題を使って説明します．

例題　t がすべての実数を動くとき，直線

$$y = tx + t^2 - 1 \quad \cdots\cdots(*)$$

が通る領域を図示せよ．

まずは，問題文がどういうことを問うているかを理解する必要があります．t の値を色々変えて，グラフをかいてみましょう．

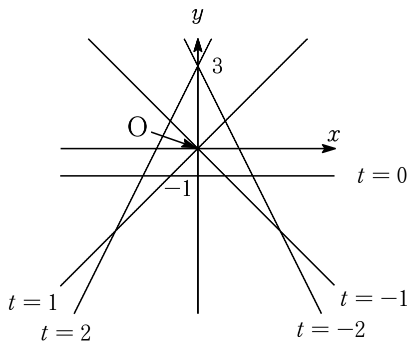
$t = -2$ のとき，　$y = -2x + 3$

$t = -1$ のとき，　$y = -x$

$t = 0$ のとき，　$y = -1$

$t = 1$ のとき，　$y = x$

$t = 2$ のとき，　$y = 2x + 3$



このように，t の値を色々変えると，$(*)$ は様々な直線を表すことがわかると思います．問題文は t がすべての実数値をとるときに，この直線 $(*)$ が平面を埋め尽くす部分を図示しなさいと言っているのです．

しかしながら，すべての実数 t を調べるわけにはいきません．どうすればよいのでしょうか？逆を考えてみましょう．例えば，$(*)$ が点 $(0, 0)$ を通るとき，

$$t^2 - 1 = 0 \iff t = \pm 1$$

となります．これは $t = \pm 1$ のときに，$(*)$ が点 $(0, 0)$ を通ることを表しているのです．また，点 $(1, 1)$ はどうでしょうか？このとき，

$$1 = t + t^2 - 1 \iff t^2 + t - 2 = 0 \iff (t+2)(t-1) = 0 \quad \therefore \ t = -2, 1$$

したがって，$t = -2, 1$ のときに $(*)$ が点 $(1, 1)$ を通ることがわかります．では，$(0, -3)$ はどうでしょう？このとき，

$$-3 = t^2 - 1 \iff t^2 = -2 \quad \therefore \ t = \sqrt{2}i \quad (i \text{ は虚数単位})$$

となり，実数 t が存在しません．つまり，t が実数全体を動く限り $(*)$ は点 $(0, -3)$ を通ることができないのです．

このように見ていくと，次のようにまとめることができます．

$(*)$ が点 (X, Y) を通る．　$\Longrightarrow$　t についての方程式 $Y = tX + t^2 - 1$ が実数解をもつ．

実は，この類の問題はこの部分が理解できれば 9 割り方理解したのと同じことなのです．あとは，2 次方程式の実数解の問題になりますから，そこがしっかりしていればそれほど難しくはないでしょう．では，**例題** の解答を載せて

おきます.

解答 と **解説**

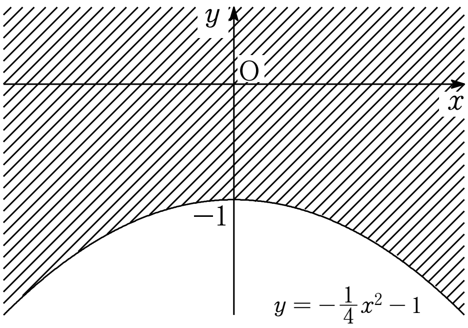
$y = tx + t^2 - 1$ が点 (X, Y) を通るとき,

$$Y = tX + t^2 - 1 \iff t^2 + Xt - Y - 1 = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

であるから, この t についての 2 次方程式が実数解をもてばよい. よって, 判別式を D とすると,

$$D = X^2 - 4(-Y-1) \geqq 0 \iff X^2 + 4Y + 4 \geqq 0$$
$$\iff Y \geqq -\frac{1}{4}X^2 - 1$$

ゆえに, 求める領域は下図の斜線部分で境界線上の点も含む.



解説

実数 t に様々な値を代入して得られる直線が通る領域がこれで図示できました. 問題はここで終わりですが, 少しこの答えについて考察してみましょう. 上図の境界に現れる曲線が何を表しているのかを考えてみましょう. 境界の曲線は, 解答をみればわかるように $D = 0$ のときのものです. これは, (∗) が重解をもつときですから, 言い換えれば与えられた直線はこの境界に現れる放物線に接しているということになります. 要するに, 与えられた直線は, t の値を変化させることで, この放物線に接しながら動くということなのです. そして, この放物線には,『包絡線』という名前がついています. 参考程度に知っておくとよいでしょう.

では, 類題を解いてみましょう.

◀類題演習▶

1 解答 ☞ p.3

k がすべての実数をとって変化するとき, 直線 $2kx + y + k^2 = 0$ が通る領域を図示せよ.

2 解答 ☞ p.3

t がすべての実数をとって変化するとき, 放物線 $y = 2tx^2 - t^2 + t - 1$ が通る領域を図示せよ.

3 解答 ☞ p.4

k がすべての実数をとって変化するとき, 直線 $2kx - k^2 - y + 2 = 0$ が通らない領域を図示せよ.

1 解答 と 解説

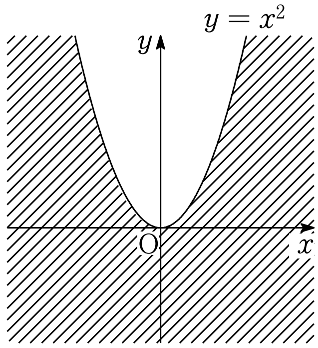
直線 $2kx+y+k^2=0$ が通過する領域内の点を $(X,\,Y)$ とおくと，

$$2kX+Y+k^2=0 \iff k^2+2Xk+Y=0 \quad \cdots\cdots①$$

k はすべての実数をとるので，① を k の 2 次方程式とみなし判別式を D とすると，

$$D/4=X^2-Y \geqq 0 \quad \therefore \quad Y \leqq X^2$$

ゆえに，直線 $2kx+y+k^2=0$ が通過する領域は下図の斜線部分で境界線上の点を含む．



———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

k はすべての実数をとるので，k についての 2 次方程式において判別式だけで結論を得ます．図示した後は，境界線上の点を含むか否かを述べることを忘れないようにしましょう．

2 解答 と 解説

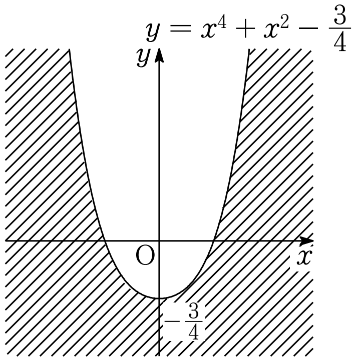
放物線 $y=2tx^2-t^2+t-1$ が通過する領域内の点を $(X,\,Y)$ とおくと，

$$Y=2tX^2-t^2+t-1 \iff t^2-(2X^2+1)t+Y+1=0 \quad \cdots\cdots①$$

t はすべての実数をとるので，① を t の 2 次方程式とみなし判別式を D とすると，

$$D=(2X^2+1)^2-4(Y+1) \geqq 0 \iff Y \leqq X^4+X^2-\frac{3}{4}$$

ゆえに，放物線 $y=2tx^2-t^2+t-1$ が通過する領域は下図の斜線部分で境界線上の点を含む．



———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

4 次関数のグラフをかくのためには微分積分の分野を学習していないといけません．未履修の人は，領域を表す式が導けた時点で良しとしましょう．

3 解答 と 解説

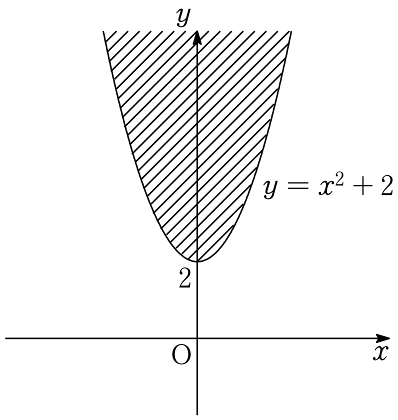
直線 $2kx-k^2-y+2=0$ が通過しない領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$2kX-k^2-Y+2=0 \iff k^2-2Xk+Y-2=0 \quad \cdots\cdots①$$

直線が通過しないということは，① をみたす実数 k が存在しないということなので，① を k の 2 次方程式とみなし判別式を D とすると，

$$D/4=X^2-(Y-2)<0 \iff Y>X^2+2$$

ゆえに，直線 $2kx-k^2-y+2=0$ が通過しない領域は下図の斜線部分で境界線上の点を含まない．



♣ ◇ ♠ ♡

解説

本問のように，通過しない領域を考える場合は，通過する領域を求めて，その補集合をとってもよい．しかし，問題が理解できていれば，判別式で直接求めることができるので，視野を広げるという意味からもどちらの方法でもできるようにしておこう．

以上で，通過領域の基本部分は終わりです．理解できれば解答はそれほど難しくないことがわかると思います．しかし，ここからは問題がやや複雑化していきます．t に制限がついたり，式の形が複雑になったり，融合問題として他の分野と融合されたりと，様々な状況が考えられます．まずは，t に制限がついた場合をやっていき，最後に融合された実際の入試問題にもチャレンジしてみましょう．

例題 （'99　三重大）

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ を $a \geqq 0$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ．

さて，今度の問題では，a が 0 以上の範囲で移動したときという制限がついています．これは，先ほどの問題と同じように考えれば，与えられた方程式を a の 2 次方程式とみなして，

$$2a^2-2xa+x^2-y=0$$

とします．これが正の実数解をもつような x, y の条件を求めればよいのです．したがって，結果的には，2 次方程式の解の配置問題に帰着します．

———— ♣ ———— ♠ ————

解答 と **解説**

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が通過する領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$Y=(X-a)^2+a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a^2-2Xa+X^2-Y=0$$

をみたす．これが $a \geqq 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもてばよい．
ここで，$f(a)=2a^2-2Xa+X^2-Y$ とおくと，

$$f(a)=2\left(a-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{2}X^2-Y$$

よって，

（ i ）　$\dfrac{X}{2} \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{2}X^2-Y \leqq 0$

または

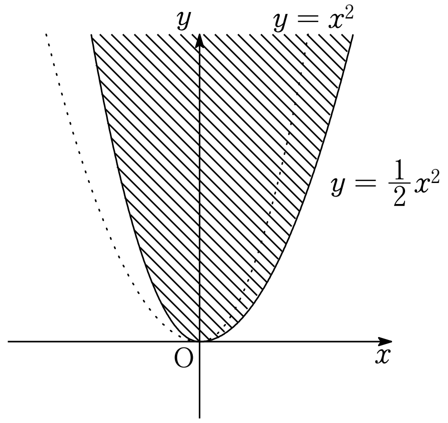
（ii）　$\dfrac{X}{2}<0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

であればよい．

（ i ）のとき，$X \geqq 0$ かつ $Y \geqq \dfrac{1}{2}X^2$ である．

（ii）のとき，$X<0$ かつ $X^2-Y \leqq 0$ すなわち $Y \geqq X^2$ である．

ゆえに，求める通過領域は，次図の斜線部分で境界線上の点を含む．



———— ♢ ———— ♡ ————

解説

解いてみればわかりますが，2 次方程式の解の配置問題が理解できていなければ，きちんとした答えが導けません．通過領域の問題を解く際に非常に大切な分野が解の配置問題といえます．もしも，そこがまだよく理解できていない人は，早急に対策をする必要があるでしょう．

では，類題をいくつか挙げておくので，練習しましょう．

◀類題演習▶

4 （'06　神戸大・改）　解答 ☞ p.7

実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える．t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通る点 (x, y) の全体を図示せよ．

5 （'00　静岡文化芸術大・改）　解答 ☞ p.8

直線 $y = 2px + p^2 + 1$（p は定数）を l_p とする．p が $|p| \leqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_p が 2 回通り得る範囲を，図示せよ．

6 （'96　中京学院大）　解答 ☞ p.9

θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を動くとき，xy 平面上の直線 $y = 2(\sin\theta)x - \cos^2\theta + 1$ の通りうる範囲を式で表し，これを図示せよ．

これらの他にも円の通過領域や線分の通過領域など，発展的な問題は数多くあります．それは，演習ルームで扱うことにしましょう．

4 解答 と 解説

直線 $y=2tx-t^2$ が通過する領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$Y=2tX-t^2 \iff t^2-2Xt+Y=0 \quad \cdots\cdots①$$

t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通過するということは，① をみたす実数 t が $|t| \geqq 1$ で少なくとも 1 つ存在すればよいので，① の左辺を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=(t-X)^2+Y-X^2$$

(i) $|X|<1$ のとき，

$f(-1) \leqq 0$ または $f(1) \leqq 0$ であればよいので，

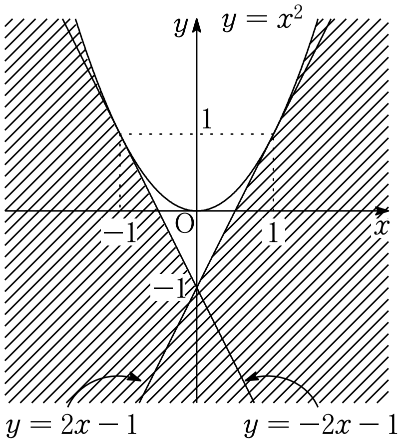
$$f(-1) \leqq 0 \iff 1+2X+Y \leqq 0 \iff Y \leqq -2X-1 \quad \cdots\cdots②$$

$$f(1) \leqq 0 \iff 1-2X+Y \leqq 0 \iff Y \leqq 2X-1 \quad \cdots\cdots③$$

(ii) $|X| \geqq 1$ のとき，

頂点の Y 座標が 0 以下であればよいので，$Y-X^2 \leqq 0$ ……④

ゆえに，②〜④ より，直線 l_t の通過する領域は，下図の斜線部分で，境界線上の点を含む．



———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

本問は，結果的に解の配置問題に帰着します．① を t についての 2 次方程式とみなし，その解が -1 以下の解をもつかあるいは 1 以上の解をもてばよいのです．範囲がある場合は，判別式だけでは条件不足なので，不慣れな人はきちんとグラフをかいて条件をみつけるようにしましょう．

5 解答 と 解説

直線 $y=2px+p^2+1$ が通過する領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$Y=2pX+p^2+1 \iff p^2+2Xp+1-Y=0 \quad \cdots\cdots①$$

p が $|p| \leqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_p が 2 回通過するということは，① をみたす実数 p が $|p| \leqq 1$ で 2 つ存在すればよいので，① の左辺を $f(p)$ とすると，

$$f(p)=(p+X)^2-X^2+1-Y$$

（i） $|-X| \leqq 1$ すなわち $-1 \leqq X \leqq 1$ のとき，

$f(-X)<0$ かつ $f(-1) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ であればよいので，

$$f(-X)<0 \iff -X^2+1-Y<0 \iff Y>-X^2+1 \quad \cdots\cdots②$$

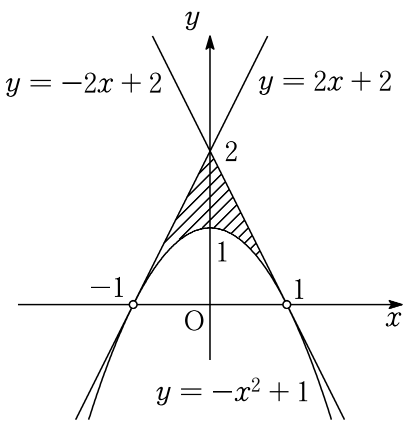
$$f(-1) \geqq 0 \iff 1-2X+1-Y \geqq 0 \iff Y \leqq -2X+2 \quad \cdots\cdots③$$

$$f(1) \geqq 0 \iff 1+2X+1-Y \geqq 0 \iff Y \leqq 2X+2 \quad \cdots\cdots④$$

（ii） $|-X|>1$ すなわち $X<-1,\ 1<X$ のとき，

① をみたす実数 p が $|p| \leqq 1$ で 2 つ存在することはないので不適.

ゆえに，②～④ より，直線 l_p が 2 回通過する領域は，下図の斜線部分で，境界線上の点は直線上の点のみ含み，白丸部分と曲線上の点は含まない.



――――― ♣ ――――― ◇ ――――― ♠ ――――― ♡ ―――――

解説

直線が 2 回通過するということは，実数 p の値が 2 つ存在するということになります．このことが理解できていれば，ここまでやってきたことがちゃんと身に付いているでしょう．あとは，解の配置問題になるので，正確な場合分けをしてやればよいだけです.

6 解答 と 解説

$y=2(\sin\theta)x-\cos^2\theta+1$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ において，$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ であり，与えられた方程式は，

$$y=2tx-(1-t^2)+1 \iff t^2+2xt-y=0$$

と変形することができる．この直線が通る領域内の点を (X, Y) とすると，

$$t^2+2Xt-Y=0 \quad \cdots\cdots①$$

であるから，与えられた直線が通過するということは，① を t に関する 2 次方程式とみなすとき，この方程式の解が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の実数解をもてばよい．① の左辺を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=(t+X)^2-X^2-Y$$

となる．

(ⅰ) $-X\leqq 0$ すなわち $X\geqq 0$ のとき，

$f(0)\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ であればよいので，

$$f(0)\leqq 0 \iff Y\geqq 0 \quad \cdots\cdots②$$

$$f(1)\geqq 0 \iff Y\leqq 2X+1 \quad \cdots\cdots③$$

(ⅱ) $0<-X<1$ すなわち $-1<X<0$ のとき，

$f(-X)\leqq 0$ かつ「$f(0)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$」であればよいので，

$$f(-X)\leqq 0 \iff Y\geqq -X^2 \quad \cdots\cdots④$$

$$f(0)\geqq 0 \iff Y\leqq 0 \quad \cdots\cdots⑤$$

$$f(1)\geqq 0 \iff Y\leqq 2X+1 \quad \cdots\cdots⑥$$

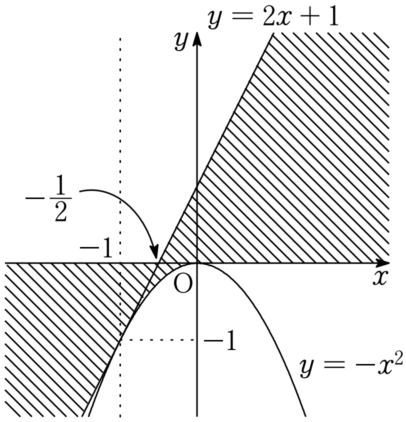
(ⅲ) $1\leqq -X$ すなわち $X\leqq -1$ のとき，

$f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$ であればよいので，

$$f(0)\geqq 0 \iff Y\leqq 0 \quad \cdots\cdots⑦$$

$$f(1)\leqq 0 \iff Y\geqq 2X+1 \quad \cdots\cdots⑧$$

ゆえに，②〜⑧ より，与えられた直線が通過する領域は，右図の斜線部分で，境界線上の点は含む．



♣ ◇ ♠ ♡

解説

これまでの通過領域の問題を応用した問題です．しかし，置き換えを行えばこれまでの問題と同じになるので，それほど難問ではありません．このように，少し形が変わったものもあるので，しっかり類題演習をしておきましょう．

