漸化式で表された数列の極限

漸化式で表された数列の極限を求める場合，その漸化式から一般項が求められれば特に問題はないでしょう．しかし，いつも一般項が求められるわけではないので，そのような場合はどのようにして極限を計算すればよいのでしょうか？ここでは，『解けない漸化式の極限』にテーマを絞って解説・演習をしていきましょう．

この類の問題は，難関といわれる大学や医学部などでよく見られます．このような問題を初見で解くことができる人はほとんどいないでしょう．すなわち，対策ができている人とできていない人で大幅に得点に影響されてしまうといっても過言ではありません．もちろん，初見でも丁寧な誘導がついていれば解けないわけではありませんが，対策をしておくことに越したことはありません．では，この問題を解くために必要な知識や考え方から始めていきましょう．

例題　（山形大）

n を自然数とする．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1 \ , \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{25x_n}\right)$$

で定義する．

（1）　$x_n \geqq \dfrac{1}{5}$ を証明せよ．

（2）　$x_{n+1} - \dfrac{1}{5} \leqq \dfrac{1}{2}\left(x_n - \dfrac{1}{5}\right)$ を証明せよ．

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

ここで与えられた数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるのは困難です…．ところが，一般項が求められなくてもしかるべき手法を用いれば，その極限は求めることができます．本問はまさにその手法を誘導してくれているのです．このような問題は，様々な大学で出題されているため，数列の極限が頻出である大学・学部を受験する人は絶対にやっておかなければならない対策なのです．もちろん，難関大や医学部などではその誘導すらない所もあるので，誘導にしたがって断片的に解くのではなく問題の流れをしっかりと理解しながら解くことが非常に大切です．それでは，解説を交えながら解答していきましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

（1）　方針　自然数 n に関する証明をするのですから，数学的帰納法を用います．

【証明】

（ i ）　$n = 1$ のとき，$x_1 = 1$ より $x_1 \geqq \dfrac{1}{5}$ が成立する．

（ii）　$n = k$ のとき，$x_k \geqq \dfrac{1}{5}$ が成り立つと仮定する．ここで，

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{25x_k}\right) - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{50x_k}(25x_k^2 + 1 - 10x_k) \\ &= \frac{1}{50x_k}(5x_k - 1)^2 \end{aligned}$$

☜ 与えられた漸化式を利用する．

ゆえに，$x_k \geqq \dfrac{1}{5}$ のとき，$x_{k+1} - \dfrac{1}{5} \geqq 0$ が成り立つ．

したがって，(i), (ii) よりすべての自然数 n に対して $x_n \geqq \dfrac{1}{5}$ であることが示された．(証明終)……(答)

(2) $\boxed{\text{方針}}$ 基本にしたがって (右辺) − (左辺) $\geqq 0$ を示します．

【証明】

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) - \left(x_{n+1} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{25x_n}\right) + \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{50x_n} \\
&= \frac{5x_n - 1}{50x_n} \geqq 0 \quad \left(\because\ x_n \geqq \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) - \left(x_{n+1} - \frac{1}{5}\right) \geqq 0 \iff x_{n+1} - \frac{1}{5} \leqq \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right)$$

より，題意は示された． (証明終)……(答)

(3) $\boxed{\text{方針}}$ (1), (2) の結果と，はさみうちの原理を利用します．

(1), (2) より，

$$0 \leqq x_{n+1} - \frac{1}{5} \leqq \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right)$$

が成り立つので，この関係を繰り返し用いると，

$$\left.\begin{aligned}
0 \leqq x_n - \frac{1}{5} &\leqq \frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \frac{1}{5}\right) \\
&\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x_{n-2} - \frac{1}{5}\right) \\
&\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(x_{n-3} - \frac{1}{5}\right) \\
&\leqq \cdots\cdots \\
&\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}\right\}$$

ここの計算が苦手という人がよくいますが次のように考えます．
各行にある $\dfrac{1}{2}$ の指数部分と x の添え字に注目すると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\bigcirc} \text{ と } x_{n-\bigcirc}$$

のように，なっていることがわかります．
式を追っていくと，$\dfrac{1}{2}$ は一つずつ増え x の添え字は一つずつ減っていくので，和が常に一定になっているということがわかります．
ここまで発見できれば，最後の式で x_1 となるときの $\dfrac{1}{2}$ の指数部分の数が計算できるというわけです．

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{5}\right) = 0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{5}}\text{……(答)}$$

である．

◇ ♡

漸化式が与えられている場合，証明をするときは数学的帰納法を用いるとうまくいくことが多々あります．式変形を見てもわかるように，証明の途中で与えられた漸化式を用いることができるため，スムーズに計算が進むことが多いからです．(3) では，式変形に慣れておく必要はありますが，解答の方針が立てられていればそれほど難しい計算をしているわけではないことが理解できるでしょう．

この問題を通して次のことを学びましょう．

（ｉ） 漸化式が解けないときは，与えられた数列の一般項がとることのできる値を絞る．

（ii） 最終的には，はさみうちの原理を利用して極限を求める．

（iii） そのために，はさみうちの原理が利用できるような不等式を導く必要がある．

（ｉ）は必ずしも必要ではありません．直接不等式を導いて，はさみうちの原理へという流れの問題もあります．ここまでで，おおまかな流れがつかめたでしょうか？一つ類題演習をしてみましょう．

◀類題演習▶

1 n を自然数とする．数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 1$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ で定義する．

(1) $1 \leqq x_n < 2$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

方針　先ほどの 例題 の (2) に相当する部分の設問を削除してみました．はさみうちの原理を見据えた不等式を見つけてきましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) 【証明】

（ｉ） $n = 1$ のとき，$x_1 = 1$ であるから，$1 \leqq x_1 < 2$ をみたし成り立つ．

（ii） $n = k$ のとき，$1 \leqq x_k < 2$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} x_{k+1} - 1 &= \sqrt{x_k + 2} - 1 \\ &= \frac{x_k + 1}{\sqrt{x_k + 2} + 1} > 0 \quad \text{☜ 分子を有理化します．} \\ 2 - x_{k+1} &= 2 - \sqrt{x_k + 2} \\ &= \frac{2 - x_k}{2 + \sqrt{x_k + 2}} > 0 \quad \text{☜ 分子を有理化します．} \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$1 \leqq x_n < 2$ が成り立つことが示された．　(証明終)……(答)

(2) 与えられた漸化式から

$$0 < |2 - x_{n+1}| = \left|2 - \sqrt{x_n + 2}\right| = \left|\frac{4 - (x_n + 2)}{2 + \sqrt{x_n + 2}}\right| = \left|\frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}}\right|$$

が成り立つ．ここで，(1) より $1 \leqq x_n < 2$ であるから，

$$\left|\frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}}\right| = \frac{|2 - x_n|}{2 + \sqrt{x_n + 2}} < \frac{1}{2}|2 - x_n| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(2 - x_n) = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 2}\text{……(答)}$$

である．

◇ ♡

(2) での不等式の導き方はちょっと思いつかないよ！って人が多いかもしれません．それはあることを知らないから当然です．そのあることとは，(2) の答えです．何言ってるの？って思うかもしれませんが，実は (2) でいきなり登場した $\left|2 - x_{n+1}\right|$ に大きなヒントがあります．この類の問題では，

$$0 < x_n - (\text{答}) < p^n \quad (0 < p < 1)$$

という形の式を作って，右辺が 0 に近づくので，はさみうちの原理によって x_n が (答) に近づくという考え方を用いています．したがって，(2) の答えが予想できなければ不等式を作ることは困難なのです．あれっ！？それってなんか矛盾してませんか？答え（極限値）が求めたいのに答え（極限値）を知らないと解けないって…それはあくまで答えを予想するのであって，答えを求めるわけではないという点に注意しましょう．（予想して証明！帰納法と同じ考え方です）小問で誘導されている場合はそれにしたがって解けばよいのですが，本問のように誘導がない場合は，答えを予想する手段を知っておく必要があるのです．

では，答えを予想する手段を説明しましょう．まず

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

とします．この α が答えになりますね！この式が成り立っていると言うことは，

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$$

も成り立っているということになります．つまり，与えられた漸化式において

$$x_{n+1} = x_n = \alpha$$

とおいて α の方程式を解いてみます．

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 = \alpha + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$$

(1) より，$1 \leqq x_n < 2$ なので，$\alpha = 2$ であることがわかります．(x_n は 2 になれませんが，α は $n \to \infty$ のときの x_n の極限値なので，$\alpha = 2$ と表しても問題ありません．)

これで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ であるという予想が立ちました！これを元にして，

$$0 < x_n - 2 < p^n \quad (0 < p < 1)$$

という形の不等式を立式するのです．不等式を立式するためのポイントが分かったので，不等式の立式は経験を積んで慣れてください．

ちょっと話はそれますが，「$x_{n+1} = x_n = \alpha$ とおいて α の方程式を解いてみます．」という部分で何か思い出しませんか？そうです！隣接２項間漸化式の特性方程式です！

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

などの変形の時に用いますよね？この漸化式を $a_1 = 3$ とでもして解いてみてください．そして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を計算してみてください．そうすると，その極限値は特性方程式の解になっていることが分かると思います．しかし，これはいつも成り立つとは限りません．例えば，$a_{n+1} = pa_n + q$ で $p \geqq 1$ のときは，発散してしまいます．このことまで詳しく話していると大学の範囲に突入して今回のテーマからはずれてしまうのでここでは述べません．興味がある人は調べてみてください．

それでは，ここで類題を 3 題用意していますので，やってみましょう！

◀演習問題▶

2

解答 ☞ p.6

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=4$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

3

解答 ☞ p.7

数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1=[a]\ ,\quad x_{n+1}=\sqrt{3x_n+4}\quad (0\leqq a\leqq 3)$$

ただし，$[a]$ は a を越えない最大の整数を表すものとする．

(1) $[a]\leqq x_n<4$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) $0<4-x_{n+1}\leqq\dfrac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}(4-x_n)$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ．

4

解答 ☞ p.9

自然数 n に対して，$a_1=3$，$b_1=1$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{2}\quad ,\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+2b_n}$$

をみたす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

(1) a_nb_n を求めよ．

(2) $a_n>2b_n>0$ であることを証明せよ．

(3) $n\geqq 2$ のとき，

$$a_n-2b_n<\frac{1}{2}(a_{n-1}-2b_{n-1})$$

であることを証明せよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

方針 まずは答えの予想からです．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と仮定しましょう．すると，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つので，与えられた漸化式に $a_{n+1} = a_n = \alpha$ を代入してみます．

$$\alpha = \sqrt{2\alpha+3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 = 2\alpha+3 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha-3)(\alpha+1) = 0$$

となるので，$\alpha = 3$ であることがわかります．($\alpha = -1$ は，最初の方程式を満たさないので不適です．これは，2 乗することで得られた実際にはありえない解で「無縁解」といいます．)

2 解答 と 解説

与えられた漸化式を変形すると，

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3} &\iff a_{n+1}-3 = \sqrt{2a_n+3}-3 && \text{☜ 予想した極限値を両辺から引く．} \\ &\iff a_{n+1}-3 = \frac{2a_n+3-9}{\sqrt{2a_n+3}+3} && \text{☜ 分子を有理化する．} \\ &\iff a_{n+1}-3 = \frac{2(a_n-3)}{\sqrt{2a_n+3}+3} && \text{☜ 分子を計算する．} \\ &\iff a_{n+1}-3 = \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}(a_n-3) && \text{☜ 右辺を変形する．} \end{aligned}$$

両辺の絶対値をとると，

$$\begin{aligned} |a_{n+1}-3| &= \left|\frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}(a_n-3)\right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}|a_n-3| && \text{☜ } \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3} \geqq 0 \text{ なので絶対値をはずす．} \\ &\leqq \frac{2}{3}|a_n-3| && \text{☜ } \sqrt{2a_n+3} \geqq 0 \text{ なので，} \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3} \leqq \frac{2}{3} \\ &\leqq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |a_{n-1}-3| \\ &\leqq \cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n |a_1-3| \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n && (\because \ a_1 = 4) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$0 \leqq |a_n-3| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-3| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 3} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

前半の山場は，極限を予想して

$$a_{n+1}-3 = \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}(a_n-3) \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}-3| \leqq \frac{2}{3}|a_n-3|$$

のような変形をするところにあります．この部分がしっかり演習できていないと，この問題を攻略することはできません．自力で変形できるようにしておきましょう．

方針 誘導にしたがって，素直に計算していけば解けるのですが，(1) では，$[a]$ の扱いがポイントになります．$0 \leqq a \leqq 3$ という条件から $[a]=0, 1, 2, 3$ となることに注意しましょう．

3 解答 と 解説

(1) 【証明】

$[a] \leqq x_n < 4$ ……① とする．

(i) $n=1$ のとき，

$x_1=[a]$ より，① は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，すなわち，

$[a] \leqq x_k < 4$ が成り立つと仮定すると，

$x_{k+1}=\sqrt{3x_k+4}$ から，

$$\sqrt{3[a]+4} \leqq x_{k+1} < \sqrt{3\times 4+4}=4$$

また，

$$\begin{aligned} x_{k+1}-[a] &\geqq \sqrt{3[a]+4}-[a] \\ &= \frac{3[a]+4-[a]^2}{\sqrt{3[a]+4}+[a]} \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq a \leqq 3$ より，$[a]=0, 1, 2, 3$ であるから，

$$3[a]+4-[a]^2>0$$

ゆえに，

$$[a] \leqq x_{k+1} < 4$$

よって，$n=k+1$ のときも，① は成立する．

ゆえに，(i), (ii) より，① は成立する．　(証明終)……(答)

(2) 【証明】

$$\begin{aligned} 4-x_{n+1} &= 4-\sqrt{3x_n+4} \\ &= \frac{16-3x_n-4}{4+\sqrt{3x_n+4}} \\ &= \frac{3(4-x_n)}{4+\sqrt{3x_n+4}} \end{aligned}$$

$[a] \leqq x_n < 4$ から，

$$0<\frac{3(4-x_n)}{4+\sqrt{3x_n+4}} \leqq \frac{3(4-x_n)}{4+\sqrt{3[a]+4}}$$

ゆえに，

$$0<4-x_{n+1} \leqq \frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}(4-x_n)$$

が示された．　(証明終)……(答)

(3) (2) の結果より,

$$
\begin{aligned}
0 < 4 - x_{n+1} &\leqq \frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}(4-x_n)\\
&\leqq \left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^2(4-x_{n-1})\\
&\leqq \cdots\cdots \qquad ☞ \boxed{\text{解説}}\\
&\leqq \left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^n(4-x_1)\\
&= \left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^n(4-[a])
\end{aligned}
$$

である．ここで，$0 < \dfrac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}} < 1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^n(4-[a]) = 0$$

ゆえに，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}(4-x_n) = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 4}\cdots\cdots(\text{答})$$

――― ♣ ――― ♢ ――― ♠ ――― ♡ ―――

$\boxed{\text{解説}}$

(3) での式変形は，p.2 で説明したものと同じ原理で行っています．もう一度簡単に説明しておくのでしっかりと理解しておきましょう．この式変形は次の部分に着目します．

$$\left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}(4-x_{\boldsymbol{\beta}})$$

この α, β は，式が一つ進むにつれて α は 1 つずつ大きくなり，β は 1 つずつ小さくなっていきます．すなわち，常に $\alpha+\beta$ は一定の値をとるのです．この式変形では，最初の段階で $\alpha+\beta = n+1$ となっているので，今わかっている値 x_1 まで変形させると，α の値は，$\alpha = n+1-1 = n$ となるわけです．

方針　本問も誘導にしたがって解いていけばすんなり解けますが，(4) でどのようにして $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めるかが問題になります．もちろん (3) を利用するのでしょうが，これだけでは b_n が邪魔になってしまうので，別の不等式を見つけてくる必要がありそうです．

4 解答 と 解説

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+1}b_{n+1} &= \frac{a_n+2b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+2b_n} \\ &= a_nb_n \\ &= a_{n-1}b_{n-1} \\ &= \cdots\cdots \\ &= a_1b_1 = 3 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a_nb_n = 3}$……(答)

(2) 【証明】

$a_1>0$ ，$b_1>0$ であるから，与えられた漸化式より，帰納的に $a_n>0$ ，$b_n>0$ であることは明らかなので，$a_n>2b_n$ を示そう．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=3$ ，$2b_1=2$ となるので，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，すなわち $a_k>2b_k>0$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} a_{k+1}-2b_{k+1} &= \frac{a_k+2b_k}{2}-\frac{4a_kb_k}{a_k+2b_k} \\ &= \frac{(a_k+2b_k)^2-8a_kb_k}{2(a_k+2b_k)} \\ &= \frac{(a_k-2b_k)^2}{2(a_k+2b_k)}>0 \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n について $a_n>2b_n>0$ が成り立つ．　(証明終)……(答)

(3) 【証明】

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n-2b_n &= \frac{(a_{n-1}-2b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+2b_{n-1})} \\ &= \frac{(a_{n-1}-2b_{n-1})}{2(a_{n-1}+2b_{n-1})}(a_{n-1}-2b_{n-1}) \end{aligned}$$

☜ (2) の (ii) の計算において，$k=n-1$ とした式

ここで，(2) の結果より，$a_{n-1}+2b_{n-1}>a_{n-1}-2b_{n-1}$ であるから，

$$\begin{aligned} a_n-2b_n &< \frac{(a_{n-1}+2b_{n-1})}{2(a_{n-1}+2b_{n-1})}(a_{n-1}-2b_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(a_{n-1}-2b_{n-1}) \end{aligned}$$

よって示された．　(証明終)……(答)

(4)　(2) より，$a_n > 2b_n > 0$ であるから，

$$\begin{cases} 4b_n^2 < 2a_nb_n \cdots\cdots ① \\ 2a_nb_n < a_n^2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ② より，$4b_n^2 < 2a_nb_n < a_n^2 \iff 4b_n^2 < 6 < a_n^2$ （$\because$ (1)）

ゆえに，$2b_n < \sqrt{6} < a_n$ となるので，

$$0 < a_n - \sqrt{6} < a_n - 2b_n$$

ここで，(3) より，

$$\begin{aligned} a_n - 2b_n &< \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2b_{n-1}) \\ &< \cdots\cdots \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - 2b_1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$$

よって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{6}) = 0$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{6}} \cdots\cdots(答)$$

——— ♣ ——— ♢ ——— ♠ ——— ♡ ———

解説

連立漸化式において極限を求める問題です．誘導無しで極限を求めるのははっきり言ってかなり難しいでしょう．丁寧に誘導していますが，一つ一つの証明が何に使えるかわからないとやっぱり難問であることに変わりはありません．これもしっかりとした訓練が必要な問題です．

さて，ここまでで基本的なものは終わりです．基本とは言ってもそれはあくまでこの類の問題の基本であって，入試レベルとしては標準からやや難だと思ってよいでしょう．では，これを応用した問題に突入していきます．ここからが今回のテーマのメインになります．

・ $x_{n+1}=f(x_n)$ で定義される数列の極限

これまでは，計算が主体でしたが，ここからは問題がやや複雑化していきます．計算量が増え考え方が難しくなるので，前ページまでの式変形などがまだよく理解できていない人はここには進まないで下さい．また，微分法や平均値の定理などを利用するので，そこに自信がない人や忘れてしまっている人は，まずそこをしっかりと固めておいてください．では，まず次の問題をベースにして解説していきましょう．

'94　筑波大

例題　（筑波大）

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　導関数 $f'(x)$ の最大値を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=x$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(3)　漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 の値によらず収束し，その極限値は (2) の方程式の解になることを示せ．

当然 (3) がこの問題で示したいことなのですが，それを示すには問題全体の流れをつかんで解答しなければいけません．しかし，この問題に触れたことが無い人は，今の段階で (1), (2) が何のためにあるのか理解できる人はほとんどいないでしょう．流れをつかむのは後回しにして，(2) までは基本問題なのでとりあえず言われるがまま解いてみましょう．

♣　♠

解答 と **解説**

(1)　方針　まずは導関数 $f'(x)$ を求めて，それを新たな関数と見て，もう一度微分し，増減表をかきます．

与えられた関数を両辺 x で微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

☜ 分子分母に e^{2x} をかけて形を綺麗にします．

ここで，$g(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot 2\cdot e^x}{(e^x+1)^3} \\ &= \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} \end{aligned}$$

であるから，$g'(x)=0$ のとき，$x=0$ となる．よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

ゆえに，$g(x)$ の最大値すなわち $f'(x)$ の最大値は，$g(0)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ ……(答)

(2) $\boxed{方針}$ $h(x)=f(x)-x$ とおいて，$y=h(x)$ が x 軸とただ 1 つの交点を持つことを示します．

【証明】

$h(x)=f(x)-x$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)-1 \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}-1 \\ &= \frac{e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= -\frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}<0 \end{aligned}$$

より，$y=h(x)$ は単調減少関数である．ここで，$y=h(x)$ はすべての実数 x で連続であり，

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0)-0 \\ &= \frac{1}{2}>0 \\ h(1) &= f(1)-1 \\ &= \frac{1}{1+e^{-1}}-1 \\ &= -\frac{1}{e+1}<0 \end{aligned}$$

であるから，中間値の定理により，$y=h(x)$ は x 軸とただ 1 つの交点をもつ．ゆえに，示された．

(証明終)……(答)

さて，ここからが本題です．(1), (2) の設問の必要性はまだわかりません．しかし，(1) で $f'(x)$ の最大値を求めたり，(2) で実数解が一つしかないという証明をさせられたりしたのですから，これらは (3) の証明をするために必要な準備なんだと考えるのが自然でしょう．（問題によっては，全く無関係な問いがあることもあるので，必ずとは言えないのですが…）では，(3) はどこから手をつければよいのでしょうか？ p.10 までにやってきた事を思い出して下さい．一般項が求められない数列の極限を求めるためには，不等式を作ってはさみうちの原理を利用するというのが定石でした．まずは，それを頭に入れて式を作ってみましょう．考え方は同じなのですが，ここでは発想力が必要になります．

(3) (2) の方程式の解を $x=\alpha$ とすると，$\alpha=f(\alpha)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} a_{n+1}=f(a_n) &\iff a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-\alpha \\ &\iff a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha) \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

と式変形できる．ここで，$f(x)$ は微分可能であるから，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\alpha)=f'(c)(a_n-\alpha) \quad \cdots\cdots ②$$

をみたす実数 c が存在する．①, ② より，

$$a_{n+1}-\alpha=f'(c)(a_n-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||a_n-\alpha|$$

であり，(1) より，$f'(c)\leqq\dfrac{1}{4}$ となることから，

$$|a_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||a_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{4}|a_n-\alpha|$$

が成り立つ．したがって，

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{4}|a_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad 0\leqq|a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$$

となる．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|a_1-\alpha\right|=0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n-\alpha\right|=0 \iff \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

ゆえに，示された． **(証明終)……(答)**

◇ ♡

解答を見れば (1), (2) の必要性が理解できると思います．逆に，もし (1), (2) が無い場合は，自分で求めたり証明したりしなければならないので，難易度が格段に高くなります．したがって，この問題の流れをしっかりと理解しておく必要があるのです．(3) の後半は，この講座の前半で十分に練習しているはずなので，ここまで式変形できれば，ゴールは簡単に見えてきます．つまり，いかにして $\left|a_{n+1}-\alpha\right| \leqq \dfrac{1}{4}\left|a_n-\alpha\right|$ という形を作り出すかがポイントになるのです．平均値の定理は，こうした変形をするための道具にすぎません．普段あまり使い慣れていない定理だと思いますが，いざという時には利用できるように頭の片隅に置いておく必要があるのです．

この問題の流れを頭に植え付けておいて，次の類題を解いてみましょう．

◀類題演習▶

5 （山梨大・改）

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において関数 $f(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)$ を考える．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ の導関数の絶対値 $\left|f'(x)\right|$ の最大値を求めよ．

(2) 方程式 $x=f(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つの解をもつことを示せ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=0,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定める．(1) の最大値を K, (2) の解を α とするとき，

$$\left|x_{n+1}-\alpha\right| \leqq K\left|x_n-\alpha\right|\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を証明せよ．

方針　先ほどの 例題 と全く同じ流れです．本問はそれをもっと丁寧に誘導してくれているので，自力で答案を作成してみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x) \\ &= -2e^{-x}\sin x \end{aligned}$$

ここで，$g(x)=\left|f'(x)\right|=2e^{-x}\sin x\ (\because\ -2e^{-x}\sin x \leqq 0)$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2e^{-x}\sin x + 2e^{-x}\cos x \\ &= 2e^{-x}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

であるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $g'(x) = 0$ となるのは，$x = \dfrac{\pi}{4}$ のときである．よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ゆえに，$g(x)$ の最大値すなわち $\left|f'(x)\right|$ の最大値は，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}$……(答)

(2) 【証明】

$h(x) = x - f(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - f'(x) \\ &= 1 + 2e^{-x}\sin x > 0 \quad \left(\because\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

より，$y = h(x)$ は単調増加関数である．ここで，$y = h(x)$ はすべての実数 x で連続であり，

$$\begin{aligned} h(0) &= -1 < 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

であるから，中間値の定理により，$y = h(x)$ は x 軸とただ 1 つの交点をもつ．ゆえに，示された．

(証明終)……(答)

(3) まず，$0 \leqq x_n \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることを数学的帰納法を用いて示す．

(ｉ) $n = 1$ のとき，$x_1 = 0$ より，成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，すなわち

$$0 \leqq x_k \leqq \frac{\pi}{2}$$

が成り立つと仮定すると，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(x) = -2e^{-x}\sin x < 0$ であるから，$f(x)$ は単調減少である．したがって，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqq f(x) \leqq f(0) \iff 0 < e^{-\frac{\pi}{2}} \leqq f(x) \leqq 1 < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，$0 < f(x_k) < \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $0 < x_{k+1} < \dfrac{\pi}{2}$ となるので，$n = k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，示された．

(2) の方程式の解を $x = \alpha$ とすると，$\alpha = f(\alpha)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} x_{n+1} = f(x_n) &\iff x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - \alpha \\ &\iff x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - f(\alpha) \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

と式変形できる．ここで，$f(x)$ は微分可能であるから，平均値の定理より，

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha) \quad \cdots\cdots ②$$

をみたす実数 c が存在する．①, ② より，

$$x_{n+1} - \alpha = f'(c)(x_n - \alpha) \implies \left|x_{n+1} - \alpha\right| = \left|f'(c)\right|\left|x_n - \alpha\right|$$

であり，(1) より，$\left|f'(c)\right| \leqq K$ となることから，

$$|x_{n+1}-\alpha| = |f'(c)||x_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad |x_{n+1}-\alpha| \leqq K|x_n-\alpha|$$

が成り立つ．したがって，

$$|x_{n+1}-\alpha| \leqq K|x_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqq |x_n-\alpha| \leqq K^{n-1}\alpha \quad (\because\ x_1=0)$$

となる．ここで，

$$0 < K = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} < \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{2}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{e}} < 1$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} K^{n-1}\alpha = 0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

ゆえに，示された． (証明終)……(答)

◇ ♡

例題 とよく似ている問題ですが，決定的に違うところは，定義域です．**例題** では x が全ての実数をとっていたので，特に気にすることなく (3) を解きましたが，本問では x が $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ という定義域を持っているため，(3) で (1), (2) の結果を用いるためには，$0 \leqq x_n \leqq \frac{\pi}{2}$ を示す必要があるのです．なぜなら (1) で求めた $|f'(x)|$ の最大値や (2) で示したことは，どちらも $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ という条件の元で示したことなので，(3) でその結果を使いたければ，当然条件をみたしていなければならないからです．この議論が欠落している場合は，大幅な減点を覚悟しなければいけません．

では，最後に演習問題を解いて終わりにしましょう．

◀演習問題▶

6 ('05　東京大)　解答 ☞ p.17

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める．$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ．

7 ('00　横浜国立大)　解答 ☞ p.19

$f(x)=\dfrac{x}{1+x+x\sqrt{x}}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1\ ,\quad a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ でつねに増加することを示せ．

(2)　$\dfrac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}\leqq a_n\leqq\dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}a_k$ を求めよ．

8 ('82　京都工芸繊維大)　解答 ☞ p.21

e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a<b$ のとき，$e^b-e^a<e^b(b-a)$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　c を $0<c<\dfrac{1}{e}$ である定数とするとき，方程式 $x=ce^x$ は，0 と 1 の間にただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ．

(3)　(2) の実数解を α とする．(2) の c に対し，

$$x_1=1,\ x_{n+1}=ce^{x_n}\quad (n\geqq 1)$$

で定義された数列 $\{x_n\}$ について，

$$\alpha<x_n\leqq 1,\ x_{n+1}-\alpha<ce(x_n-\alpha)\quad (n\geqq 1)$$

であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を証明せよ．

9 ('82　東京都立大)　解答 ☞ p.23

$4\leqq a_1<12,\ a_{n+1}=3+\dfrac{1}{16}a_n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．

(1)　$4\leqq a_n<12,\ a_n\geqq a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

6 解答 と 解説

(1) 【証明】

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}+\frac{1}{2}x(-2)e^{-2(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)} \quad \cdots\cdots ① \\ f''(x) &= -e^{-2(x-1)}+\left(\frac{1}{2}-x\right)(-2)e^{-2(x-1)} \\ &= 2(x-1)e^{-2(x-1)} \end{aligned}$$

であるから，$x>\frac{1}{2}$ において，$f''(x)=0$ をみたす x の値は，$x=1$ である．よって，関数 $f'(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗

ゆえに，$x>\frac{1}{2}$ で $f'(x)\geqq 0$ である．また，$x>\frac{1}{2}$ で，

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}<0$$

であるから，① より，$0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$ が示された． (証明終)……(答)

(2) 【証明】

(1) より，$x\geqq\frac{1}{2}$ のとき，$f'(x)\geqq 0$ であり，等号が成立するのは，$x=1$ のときのみである．ゆえに，$f(x)$ は $x>\frac{1}{2}$ で単調増加するので，

$$x>\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+e}{4}>\frac{1}{2} \quad \left(\because \ f(x)>\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots ②$$

をみたす．数列 $\{x_n\}$ が

$$x_0>\frac{1}{2},\ x_{n+1}=f(x_n)$$

をみたすとき，$x_n>\frac{1}{2}$ となることを数学的帰納法を用いて証明しよう．

(ｉ) $n=1$ のとき，

$$x_1=f(x_0)>\frac{1}{2} \quad \left(\because \ x_0>\frac{1}{2},\ ②\right)$$

より，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，

$$x_k>\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つと仮定すると，

$$x_{k+1}=f(x_k)>\frac{1}{2} \quad (\because \ ②,\ ③)$$

が成り立つ．ゆえに，$n=k+1$ のときも成り立つので，すべての自然数 n に対して，$x_n>\frac{1}{2}$ である．

ここで，$f(x)$ はすべての実数 x に対して微分可能であるから，平均値の定理より，

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c_n) \quad (x_n\leqq c_n\leqq 1 \text{ または } 1\leqq c_n\leqq x_n)$$

をみたす実数 c_n が存在する．$f(1)=1$ であるから，

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c_n) \iff f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)$$
$$\iff x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$$

となる．$x_n>\dfrac{1}{2}$ であるから，$c_n>1$ である．よって，(1) より，

$$0 \leqq f'(c_n)<\frac{1}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned} x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1) &\implies |x_{n+1}-1|=|f'(c_n)||x_n-1| \\ &\implies |x_{n+1}-1| \leqq \frac{1}{2}|x_n-1| \\ &\implies |x_n-1| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_0-1| \end{aligned}$$

である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_0-1|=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0 \iff \lim_{n\to\infty}x_n=1$$

である．　　　　(証明終)……(答)

♣ ◇ ♠ ♡

解説

これまでの演習がしっかりとできていれば，(2) では，x_n の極限値がわかっているので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0$ を示せばよいことは，容易にわかるでしょう．あとは，不等式をどのように立式するかがポイントになります．(1) で $f'(x)$ のとり得る値の範囲を求めているので，$f'(x)$ を使って不等式を作るのかなぁ～？と考えるのが自然でしょう．そうすれば，❺ のように平均値の定理を使うことが思いつくはずです．あとは，$x_n>\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを言う必要があるので忘れないようにしましょう．

7 解答 と 解説

(1) 【証明】

$$f'(x) = \frac{1+x+x\sqrt{x}-x\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}{(1+x+x\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{2}x\sqrt{x}}{(1+x+x\sqrt{x})^2} > 0 \quad (\because\ 0 \leqq x \leqq 1)$$

であるから，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加する．　(証明終)……(答)

(2) 【証明】

（i） $n=1$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{4},\ (\text{右辺}) = 1,\ a_1 = 1$$

であるから，成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，

$$\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2} \leqq a_k \leqq \frac{1}{k}$$

が成り立つと仮定する．このとき，$a_k \leqq \frac{1}{k} \leqq 1$ であるから，(1) の結果から，

$$f\left(\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2}\right) \leqq f(a_k) \leqq f\left(\frac{1}{k}\right) \iff f\left(\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2}\right) \leqq a_{k+1} \leqq f\left(\frac{1}{k}\right) \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．ここで，

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}} = \frac{1}{k+1+\frac{1}{\sqrt{k}}} < \frac{1}{k+1} \quad \cdots\cdots②$$

である．また，

$$f\left(\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2}\right) = \frac{\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2}}{1+\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^3}} = \frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2+1+\frac{1}{\sqrt{k}+1}}$$

であり，

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{k+1}+1)^2-\left\{(\sqrt{k}+1)^2+1+\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right\} \\
&= k+2+2\sqrt{k+1}-\left(k+2+2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k}+1} \\
&= \frac{2-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k}+1)} \\
&= \frac{2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})-1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2(\sqrt{k}+1)} \\
&\geqq \frac{2(\sqrt{2}+1)-1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2(\sqrt{k}+1)} > 0
\end{aligned}$$

であるから，

$$f\left(\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2}\right) > \frac{1}{(\sqrt{k+1}+1)^2} \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つ．①, ②, ③ より，

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1}+1)^2} \leqq a_{k+1} \leqq \frac{1}{k+1}$$

であるから，$n=k+1$ のときも成り立つ．ゆえに，数学的帰納法によりすべての自然数 n について題意の不

等式が成り立つことが示された．(証明終)……(答)

(3) $\dfrac{1}{k} < \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,dx \ (k=n,\ n+1,\ \cdots,\ 2n)$ であるから，

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k \leqq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} < \int_{n-1}^{2n} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log|x|\ \Big]_{n-1}^{2n} = \log\frac{2n}{n-1} = \log\frac{2}{1-\dfrac{1}{n}} \to \log 2\ (n\to\infty)$$

また，

$$\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2} > \int_{k}^{k+1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\,dx\ (k=n,\ n+1,\ \cdots,\ 2n)$$

であるから，

$$\sum_{k=n}^{2n} a_k \geqq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2} > \int_{n}^{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\,dx$$

である．ここで，$\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=t^2$, $dx=2tdt$ であり，

x	$n \to 2n+1$
t	$\sqrt{n} \to \sqrt{2n+1}$

となるので，

$$\begin{aligned}
\int_{n}^{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}\,dx &= \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n+1}} \frac{2t}{(t+1)^2}\,dt \\
&= \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{2}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right) dt \\
&= \left[\ 2\log|t+1| + \frac{2}{t+1}\ \right]_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n+1}} \\
&= 2\log\frac{\sqrt{2n+1}+1}{\sqrt{n}+1} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}+1} - \frac{2}{\sqrt{n}+1} \\
&= 2\log\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}+1} - \frac{2}{\sqrt{n}+1}
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\log\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}+1} - \frac{2}{\sqrt{n}+1}\right) = 2\log\sqrt{2} = \log 2$$

である．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n} a_k = \mathbf{\log 2}\text{……(答)}$$

である．

♣ ◇ ♠ ♡

解説

(1) は楽勝でしょうが，(2) は数学的帰納法での証明が，(3) では，積分不等式を立式して計算するのがかなり大変でしょう．完答できなくてもある程度の方針が立てられるようにはなっておきたいものです．

8 解答 と 解説

(1) 【証明】

関数 $y=e^x$ はすべての実数 x において微分可能であるから，平均値の定理より，

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=f'(c)\quad (a<c<b)$$

をみたす実数 c が存在する．このとき，$f'(c)=e^c$ と $e^c<e^b$ が成り立つので，

$$e^b-e^a=e^c(b-a) \quad\Longrightarrow\quad e^b-e^a<e^b(b-a)$$

ゆえに，示された．　(証明終)……(答)

(2) 【証明】

$f(x)=x-ce^x$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$f'(x)=1-ce^x>0 \quad \left(\because\ 0<c<\frac{1}{e}\right)$$

であるから，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加する．また，$f(x)$ は連続関数で，

$$f(0)=-c<0,\ f(1)=1-ce>0 \quad \left(\because\ 0<c<\frac{1}{e}\right)$$

であるから，中間値の定理により，$0<x<1$ にただ 1 つの実数解をもつ．ゆえに，示された

．　(証明終)……(答)

(3) 【証明】

まず，$\alpha<x_n\leqq 1$ ……① を示そう．

(ｉ) $n=1$ のとき，$x_1=1$ となるので，① は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，すなわち

$$\alpha<x_k\leqq 1 \text{……②}$$

が成り立つと仮定すると，α は方程式 $x=ce^x$ の解であるから，

$$x_{k+1}=ce^{x_k}>ce^{\alpha}=\alpha$$
$$x_{k+1}=ce^{x_k}\leqq ce^1<1$$

となるので，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ．ゆえに，数学的帰納法によってすべての自然数 n に対して，① が成り立つことが示された．

つぎに，① と (1) の結果から，

$$\begin{aligned}x_{n+1}-\alpha &= ce^{x_n}-ce^{\alpha}\\ &= c(e^{x_n}-e^{\alpha})\\ &< ce^{x_n}(x_n-\alpha) \quad (\because\ (1))\\ &\leqq ce(x_n-\alpha) \quad (\because\ ①)\end{aligned}$$

となるので，

$$x_{n+1}-\alpha<ce(x_n-\alpha)$$

が示された．この不等式と ① の不等式から，

$$0<x_n-\alpha<(ce)^{n-1}(x_1-\alpha)$$

が成り立ち，$0<ce<1$ であることから，

$$\lim_{n\to\infty}(ce)^{n-1}(x_1-\alpha)=0$$

よって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-\alpha)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

ゆえに，示された．　　(証明終)……(答)

——— ♣ ——— ♢ ——— ♠ ——— ♡ ———

$\boxed{\text{解説}}$

(1) の結果をどこで使うのかが少し悩むかもしれません．(3) で，はさみうちの原理を用いることはわかっているはずなので，それを使う不等式を導出するのに必要になります．

9 解答 と 解説

(1) 【証明】

まず，$4 \leqq a_n < 12$ を示そう．

（ｉ） $n = 1$ のとき，題意の条件より明らかに成り立つ．

（ii） $n = k$ のとき，すなわち

$$4 \leqq a_k < 12$$

が成り立つと仮定すると．$16 \leqq a_k^2 < 144$ より，

$$1 \leqq \frac{1}{16}a_k^2 < 9 \iff 4 \leqq 3 + \frac{1}{16}a_k^2 < 12 \iff 4 \leqq a_{k+1} < 12$$

となり，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して，$4 \leqq a_n < 12$ が成り立つことが示された．

(証明終)……(答)

また，

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \left(3 + \frac{1}{16}a_n^2\right) \\ &= -\frac{1}{16}a_n^2 + a_n - 3 \\ &= -\frac{1}{16}(a_n^2 - 16a_n) - 3 \\ &= -\frac{1}{16}(a_n - 8)^2 + 1 \geqq 0 \quad (\because\ 4 \leqq a_n < 12) \end{aligned}$$

よって，$a_n \geqq a_{n+1}$ が成り立つことが示された． (証明終)……(答)

(2) 与えられた漸化式を変形すると，

$$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{16}a_n^2 - 1 = \frac{a_n + 4}{16}(a_n - 4)$$

である．ここで，$4 \leqq a_n < 12$, $a_n \geqq a_{n+1}$ であるから，

$$0 \leqq a_{n+1} - 4 \leqq \frac{a_1 + 4}{16}(a_n - 4) \implies 0 \leqq a_n - 4 \leqq \left(\frac{a_1 + 4}{16}\right)^{n-1}(a_1 - 4)$$

となる．$0 < \dfrac{a_1 + 4}{16} < 1$ であるから，

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_1 + 4}{16}\right)^{n-1} = 0$$

よって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n \to \infty}(a_n - 4) = 0 \iff \lim_{n \to \infty} a_n = \mathbf{4} \text{……(答)}$$

である．

———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

(2) の最初の変形は，もちろん極限値を予想して行うものです．あとは，これまで通りのやり方で，不等式を作ってはさみうちの原理へ持っていけば楽勝でしょう．