1. 漸化式【初級編・基本４形態】

第１回は，最も基本的な漸化式を 4 つ扱います．名付けて**【基本４形態】**！
当然のことですが，受験生がこの 4 つを知らないなんてあり得ません！「このぐらいは知ってるよ！今更やるまでもない！」っていう声が聞こえてきそうですが，中には苦手な人や１・２年生で漸化式を始めたばかりの人もいると思うので，まとめてみました．こんなの楽勝という人はここは無視して次の**【中級編】**へ進んでください．

【基本４形態】

❶ …… $a_{n+1}=a_n+q$ **（等差数列型）**

❷ …… $a_{n+1}=pa_n$ **（等比数列型）**

❸ …… $a_{n+1}=a_n+f(n)$ **（階差数列型）**

❹ …… $a_{n+1}=pa_n+q$ **（基本隣接２項間漸化式）**

ここで挙げる４つの形態は，隣接２項間漸化式の基本形態なので，漸化式をみたときに瞬時にどのタイプなのかをしっかりと判別できるようにしておく必要があります．それぞれの形態の特徴をしっかりつかんで，どのタイプなのかを判断できるようにしましょう．特に ❶，❸ を混同する人が多いので，要注意です．❶ の方は，定数項（a_n が無い項）が**定数**であるのに対して，❸ の方は，定数項が $f(n)$ の形をしています．すなわち n を含む式です．*[1]
❶，❷ の融合型が ❹ であるから，❹ において，

$$\begin{cases} \text{（i）}\ p=1 \text{ のときは，❶ の等差数列型} \\ \text{（ii）}\ q=0 \text{ のときは，❷ の等比数列型} \end{cases}$$

となります．

では，それぞれの漸化式について，その特徴と解法をまとめていきましょう．

*1 $f(n)$ はどんな関数でもかまいません．$f(n)$ が a_n の階差数列になるので，和の計算ができなければ問題として成立しないため，出題される多くは，
多項式か指数のタイプになっています．

1　等差数列型

【等差数列型】

$$a_{n+1}=a_n+q$$

【解法と解説】

この漸化式を変形すると，$a_{n+1}-a_n=q$ という形になる．これは第 $n+1$ 項から第 n 項を引いた値が常に q（一定）になることを意味するので，公差 q の等差数列を表している．

したがって，一般項 a_n は，

$$a_n=a_1+(n-1)q$$

である．

例題 1

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=2\ ,\ a_{n+1}=a_n+4$$

解

初項 2，公差 4 の等差数列であるから，

$$a_n=2+(n-1)4 \iff a_n=4n-2\cdots\cdots(答)$$

❷ 等比数列型

【等比数列型】

$$a_{n+1} = pa_n$$

【解法と解説】

この漸化式は，第 n 項を p 倍すると第 $n+1$ 項になることを意味するので，公比 p の等比数列を表している．したがって，一般項 a_n は，

$$a_n = a_1 p^{n-1}$$

である．

例題 2

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 3\ ,\ \ a_{n+1} = 5a_n$$

解

初項 3 ， 公比 5 の等比数列であるから，

$$a_n = 3 \cdot 5^{n-1} \cdots\cdots (答)$$

❸ 階差数列型

【階差数列型】

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

【解法と解説】

この漸化式を変形すると，$a_{n+1} - a_n = f(n)$ という形になる．ここで，❶ と違う点は，第 $n+1$ 項から第 n 項を引いた値が一定の値になるのではなく，ある規則をもつ形 $f(n)$ となることにある．この $\{f(n)\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列を意味するので，一般項 a_n を求めるには階差数列を利用した解法になる．

$$n \geqq 2 \text{ のとき，} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

✏注：$n=1$ のときの吟味を忘れずに！

✏注：$\sum$ の上は，$n-1$ であることに注意！

参考……$f(n)$ が定数関数のときが，❶ の場合である．

例題 3

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 2\ ,\ \ a_{n+1} = a_n + 2n$$

解

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，与えられた漸化式から，$b_n = 2n$ であるから，*2

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$a_1 = 1 - 1 + 2 = 2$ となるので，全ての自然数 n について成り立つ．

よって，

$$a_n = n^2 - n + 2 \cdots\cdots (\text{答})$$

*2 解答を書くときは，いきなり計算から入るのではなく，まず元の数列の階差数列の一般項が何なのかを明示してからにしましょう．

❹ 基本隣接２項間漸化式

【基本隣接２項間漸化式】

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

【解法と解説】

$a_{n+1} = pa_n + q$……① に対して，

$$\alpha = p\alpha + q\text{……②}$$

を考える．①, ② の辺々をひくと

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

となり，$b_n = a_n - \alpha$ とおくことにより，❷ に帰着される．

参考……② の方程式を**特性方程式**と言います．

$$\begin{cases} \text{（ｉ）}\quad p = 1 \text{ のときは，❶ の等差数列型} \\ \text{（ii）}\quad q = 0 \text{ のときは，❷ の等比数列型} \end{cases}$$

に帰着する．

例題 4

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 3\ ,\ \ a_{n+1} = 2a_n + 2$$

解 [*3]

与えられた漸化式を変形すると，

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

ここで，$b_n = a_n + 2$ とおくと，

$$b_{n+1} = 2b_n\ ,\ \ b_1 = a_1 + 2 = 5$$

である．したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5 公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n = 5\cdot 2^{n-1} \iff a_n = 5\cdot 2^{n-1} - 2\text{……(答)}$$

[*3] 特性方程式は，解答中に書かない場合がほとんどです．書く場合は，上記のように元の漸化式から特性方程式を引く計算を書いておいた方が無難でしょう．

◀基本４形態問題演習▶

$\boxed{1}$ 基本（解 ☞ $p.7$）

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

（1） $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n+5$

（2） $a_1=9$, $a_{n+1}=3a_n$

（3） $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2n-1$

（4） $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n-3$

（5） $a_1=1$, $6a_{n+1}=3a_n+4$

（6） $a_1=2$, $2a_{n+1}=a_n$

（7） $a_1=-2$, $a_{n+1}-a_n=-4^{n-1}$

（8） $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+1$

（9） $a_1=-3$, $a_{n+1}=a_n-2$

（10） $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

◀基本４形態問題演習【解答】▶

【基本４形態】

$\boxed{1}$

（1）　$a_n=5n-2$

（2）　$a_n=3^{n+1}$

（3）　$a_n=n^2-2n+2$

（4）　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+3}{2}$

（5）　$a_n=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{4}{3}$

（6）　$a_n=2^{2-n}$

（7）　$a_n=-\dfrac{4^{n-1}+5}{3}$

（8）　$a_n=2^{n+1}-1$

（9）　$a_n=-2n-1$

（10）　$a_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

2.　漸化式【中級編・頻出８形態】

第２回は，よく入試に登場する漸化式を 8 つ扱います．名付けて**【頻出８形態】**！
文系理系問わず知っておいてもらいたいものを扱っています．中には少し難しいものもありますが，数列がよく出題される大学を受験する予定の人はこの 8 つの形態は確実にものにしておきましょう．

【頻出８形態】

5 ……	$a_{n+1}=pa_n+qr^n$	**（定数項べき乗型）**
6 ……	$a_{n+1}=pa_n+f(n)$	**（定数項多項式型）**
7 ……	$a_{n+1}=qa_n^p$	**（一般項べき型）**
8 ……	$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$	**（分数型）**
9 ……	$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n+r=0$	**（基本隣接３項間漸化式）**
10 ……	$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$	**（連立漸化式）**
11 ……	$a_{n+1}=f(n)a_n$	**（係数変化型）**
12 ……	$S_n=pa_n+q\ (p\neq 1)$	**（和・一般項混合型）**

ここで上げる８つの形態は，先の基本４形態を更に発展させたもので，5，6 に関しては 3 の a_n の係数が 1 でない場合のものである．したがって，5，6 は，$p=1$ のとき 3 となるので階差数列型の解法で求めることができる．
7 は，対数を用いて基本４形態に帰着させ，8 は，$q=0$ のときは逆数を，$q\neq 0$ のときは，特性方程式を用いて基本４形態に帰着させることができる．$r=0$ のときが頻出（教科書問題）で，$r\neq 0$ のときは誘導問題として小問が付いていることが多い．
9 は，隣接する 3 つの項の間の関係式で必ずできるようにしておきたいタイプである．$r=0$ の場合が頻出なので，その場合の例を挙げている．
10 は，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に関する漸化式で，この中でも係数のタイプで大きく 2 つに分類している．*4
11 は，等比数列の公比に当たる部分が n の式になっているタイプで，様々な解法があるので 3 通りの解法を紹介している．
12 は，和と一般項の関係式でよく出題される漸化式．

*4 一般的な係数の他に，a_n と b_n の係数が入れ替わっている特殊な場合があります．

❺　定数項べき乗型

【定数項べき乗型】

$$a_{n+1} = pa_n + qr^n$$

【解法と解説】

両辺を $p^{n+1} \neq 0$ で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \dfrac{a_n}{p^n} + \dfrac{q}{p} \cdot \left(\dfrac{r}{p}\right)^n$ となり，**❸ に帰着される**.

両辺を $r^{n+1} \neq 0$ で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r}\dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{q}{r}$ となり，**❹ に帰着される**.

注：定数項の指数部分が n 乗であろうが $n+1$ 乗であろうが関係なく $n+1$ 乗で両辺を割ることに注意してください．要するに，上記の赤の部分をあわせることが目的で割っていることになります．

例題 5

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1\ ,\ \ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$$

解

両辺を 3^{n+1} でわると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3} \quad ☜ ❹$$

$$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$$

したがって，数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 $b_1 - 1 = \dfrac{a_1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$ ，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，

$$b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

よって，求める数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n = 3^n\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right\} \quad \therefore\ a_n = 3^n - 2^n \cdots\cdots(\text{答})$$

解答は，❹ に帰着する方法を採っていますが，両辺を 2^{n+1} で割って ❸ に帰着する方法（別解）も自分でやっておきましょう．

6 定数項多項式型

【定数項多項式型】

$$a_{n+1} = pa_n + f(n)$$

【解法と解説】

階差をとることで，**4 に帰着し**，さらに **3 で処理できる**．また，このタイプは，

$f(n)$ が 1 次式のとき，　$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = p(a_n + \alpha n + \beta)$

$f(n)$ が 2 次式のとき，　$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = p(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$

の形に変形できるので，α, β, γ を求めて **2 で処理**することもできる．

例題 6

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1\ ,\ \ a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

解

与えられた漸化式が次のように変形できたとすると，

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta)$$

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n - \alpha + \beta$$

与えられた漸化式と比較して

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

これを解くと，$\alpha = 1, \beta = 2$ となり，上記の連立方程式をみたす α, β がただ１つ存在するので，与えられた漸化式は次のように変形できる．*5

$$a_{n+1} + (n+1) + 2 = 2(a_n + n + 2) \quad ☜ \ 2$$

したがって，数列 $\{a_n + n + 2\}$ は初項 $a_1 + 1 + 2 = 4$ ，公比 2 の等比数列であるから，求める数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n + n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1} \iff a_n = 2^{n+1} - n - 2 \cdots\cdots(答)$$

別解

与えられてた漸化式から

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \end{cases}$$

であるから，辺々引くと，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

となるので，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = 2b_n + 1 \iff b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

であるから，数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = a_2 - a_1 + 1 = 4$ 公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} \iff b_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 1 \iff a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 1$$

*5 変形できたという仮定のもと式変形をしていますが，もしも変形できなければ，p, α, β, γ の値が一意に定まりません．

となる．数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4 \cdot 2^{k-1} - 1) \\ &= 1 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n-1) \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$a_1 = 2^2 - 1 - 2 = 1$ となるので，$n = 1$ のときも成り立つ．ゆえに，

$$a_n = 2^{n+1} - n - 2 \cdots\cdots (\text{答})$$

7　一般項べき型

【一般項べき型】

$$a_{n+1} = qa_n^p$$

【解法と解説】

このタイプは両辺に底が q の対数をとると，

$$\log_q a_{n+1} = \log_q qa_n^p = p\log_q a_n + 1$$

となるので，**4 に帰着される**.

例題 7

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 4\ ,\ \sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt[3]{a_n}$$

解 [*6]

$$\sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt[3]{a_n} \iff (a_{n+1})^{\frac{1}{2}} = 2(a_n)^{\frac{1}{3}} \iff a_{n+1} = 2^2(a_n)^{\frac{2}{3}}$$

与えられた式から $a_n > 0$ であるから，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1} &= \log_2 2^2 + \log_2(a_n)^{\frac{2}{3}}\\ &= \frac{2}{3}\log_2 a_n + 2\end{aligned}$$

ここで，$\log_2 a_n = b_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 2 \iff b_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}(b_n - 6)$$

したがって，数列 $\{b_n - 6\}$ は初項 $b_1 - 6 = \log_2 a_1 - 6 = -4$ ，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから，

$$b_n - 6 = -4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \iff b_n = -4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 6$$

したがって，求める数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n = 2^{\left\{-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+6\right\}}\cdots\cdots(答)$$

[*6] 対数をとるので，真数部分になる a_n が真数条件 $(a_n > 0)$ をみたしていることを述べておく必要があります.

8　分数型

【分子の定数項が０の場合)】

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{ra_n + s}$$

【解法と解説】

このタイプは $a_n \neq 0$ のとき，両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{s}{pa_n} + \frac{r}{p}$$

となるので，**4 に帰着される**.

例題 8－1

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$$

解 [*7]

$a_1 \neq 0$ より，$a_n \neq 0$ となるので，両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3\frac{1}{a_n} + 2$$

ここで，$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \iff b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

したがって，数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = \dfrac{1}{a_1} + 1 = 2$ ，公比 3 の等比数列であるから，

$$b_n + 1 = 2\cdot 3^{n-1} \iff b_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1$$

したがって，求める数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1} - 1}\cdots\cdots(答)$$

[*7] 逆数をとるので，必ず分母に来る a_n が 0 でないことを述べておく必要があります.

【分子の定数項が０でない場合)】

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$$

【解法と解説】

このタイプは，特性方程式 $x = \dfrac{px+q}{rx+s}$ の 2 つの解を α ，β $(\alpha > \beta)$ とすれば，$b_n = \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ とおくことで，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるので，**❷ に帰着される**.

もしも，特性方程式の 2 つの解が，重解 $(x = \alpha)$ になった場合は，$b_n = \dfrac{1}{a_n - \alpha}$ とおくと，$\{b_n\}$ は等差数列になるので，**❶ に帰着される**.

例題 8－2

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 0\ ,\ \ a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$$

解 *8

特性方程式 $x = \dfrac{3x+2}{x+2}$ を解くと，

$$x(x+2) = 3x + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2, -1$$

よって，これを用いて，$b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 1}$ とおくと，$a_n = \dfrac{-b_n - 2}{b_n - 1}$ であるから，元の漸化式に代入して，

$$\frac{-b_{n+1} - 2}{b_{n+1} - 1} = \frac{3\dfrac{-b_n - 2}{b_n - 1} + 2}{\dfrac{-b_n - 2}{b_n - 1} + 2} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$$

また，$b_1 = \dfrac{a_1 - 2}{a_1 + 1} = -2$ であるから，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2 ，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．ゆえに，

$$b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 2}{-2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1}$$

したがって，求める数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n = \frac{2 \cdot 4^{n-1} - 2}{4^{n-1} + 2} \cdots\cdots (\text{答})$$

*8 このタイプは，小問で式変形のヒントが与えられていることが多いので，式変形だけはできるようにしておきましょう.

❾ 基本隣接３項間漸化式

【基本隣接３項間漸化式】

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n+r=0$$

【解法と解説】

$r=0$ のときは，$x^2+px+q=0$（**特性方程式**という）を解いてその解 $x=\alpha,\beta$ を求めると，

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

の２式が得られる．これは，❷ であるから，どちらかの式を計算して

$$a_{n+1}-\gamma a_n\ (\gamma=\alpha \text{ or } \beta)$$

を求めることで今度は，**❹ に帰着する**ので，これで処理することができる．

$r\neq 0$ のときは，一度階差をとることで定数 r を消去すれば上の方法が使える．しかし，定数 r がないものと考え直接上の処理方法で３項間の漸化式を作ると，**❹ に帰着**でき，この方が簡単になる．なお，各係数の和が 0 となるとき，特性方程式の解 $x=\alpha,\beta$ のうち１つは必ず 1 になるので，

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=a_{n+1}-\alpha a_n=\cdots\cdots=a_2-\alpha a_1$$

とすることができ，すぐに **❹ に帰着される**.

✎注：a_{n+2} **の係数が 1 以外の時も同様にして解くことができる．**

例題 9

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=1\ ,\ a_2=2\ ,\ 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$$

解

特性方程式とその解を求めると，

$$3x^2-4x+1=0 \iff x=\frac{1}{3},1$$

となるので，与えられた漸化式は，

$$\begin{aligned} a_{n+2}-\frac{1}{3}a_{n+1} &= a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n \\ &= a_n-\frac{1}{3}a_{n-1} \\ &= \cdots\cdots \\ &= a_2-\frac{1}{3}a_1 \\ &= 2-\frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる．すなわち，

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n=\frac{5}{3} \iff a_{n+1}-\frac{5}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)$$

したがって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{5}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2}$ ，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$a_n-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

したがって，求める数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{5}{2}\cdots\cdots(\text{答})$$

❿　連立漸化式

【連立漸化式】

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

【解法と解説】

〔解法１〕

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots \quad ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots\cdots \quad ② \end{cases}$$

①＋②×α から，

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= (p + r\alpha)a_n + (q + s\alpha)b_n \\ &= (p + r\alpha)\left(a_n + \frac{q + s\alpha}{p + r\alpha}b_n\right) \end{aligned}$$

と変形できるので，$\dfrac{q + s\alpha}{p + r\alpha} = \alpha$ となる α が見つかれば，**❷ に帰着できる**.

《係数が対称な時》

② が

$$b_{n+1} = qa_n + pb_n \cdots\cdots ②'$$

のとき，すなわち ① 式において p と q が入れ替わっているとき，

$$\begin{array}{ll} ①+②' & a_{n+1} + b_{n+1} = (p + q)(a_n + b_n) \\ ①-②' & a_{n+1} - b_{n+1} = (p - q)(a_n - b_n) \end{array}$$

となるので，**❷ に帰着できる**．あとは，それぞれ $a_n + b_n$ ，$a_n - b_n$ を求めて連立すれば一般項 a_n ，b_n を求めることができる．

理系の人は，数学Ｃで学習する行列を用いることで，次のような解法をすることもできる．

〔解法２〕

連立漸化式は，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表せ，

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

となるので，後は A^{n-1} を求めればよい．A^n の求め方は，数学Ｃで学習するが，以下にその一例を紹介する．

（ｉ） 行列 A の固有値・固有ベクトルを求め対角化する．

（ii） ケーリー・ハミルトンの定理を用いる．

（iii） $A^1,\ A^2,\ A^3,\ \cdots\cdots$ を計算して，A^n を類推し，それを証明する．

例題１０

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = b_1 = 1\ ,\ \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 2b_n & \cdots\cdots\ ① \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

解

$\dfrac{2+3\alpha}{4+\alpha} = \alpha$ をみたす α を計算すると，$\alpha = 1,\ -2$ となるので，①, ② の辺々足すと，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)\cdots\cdots③$$

また，①＋②×(−2) より，

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = 2(a_n - 2b_n)\cdots\cdots④$$

となるので，③, ④ をそれぞれ解けばよい．

③ に関しては，数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 2$ ，公比 5 の等比数列であるから，

$$a_n + b_n = 2\cdot 5^{n-1}\cdots\cdots⑤$$

④ に関しては，数列 $\{a_n - 2b_n\}$ は初項 $a_1 - 2b_1 = -1$ ，公比 2 の等比数列であるから，

$$a_n - 2b_n = -2^{n-1}\cdots\cdots⑥$$

⑤×2＋⑥ より

$$3a_n = 4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1} \iff a_n = \frac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

⑤−⑥ より

$$3b_n = 2\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1} \iff b_n = \frac{2\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

よって，

$$a_n = \frac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}\ ,\ b_n = \frac{2\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}\cdots\cdots(答)$$

別解

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, A^n を求めればよい.
ケーリー・ハミルトンの定理より, $A^2 - 7A + 10E = O$ である.
ここで, $x^2 - 7x + 10 = 0$ の解は, $x = 2, 5$ であるから, x^n を $x^2 - 7x + 10$ で割った商を $P(x)$, 余りを $ax + b$ とすると,

$$x^n = (x^2 - 7x + 10)P(x) + ax + b$$

となる. $x = 2$ のとき, $2^n = 2a + b$ となり, $x = 5$ のとき, $5^n = 5a + b$ となるので, これより a, b を計算すると,

$$a = \frac{5^n - 2^n}{3} \ , \ b = \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - 7A + 10E)P(A) + aA + b \\ &= aA + b \quad (\because \ A^2 - 7A + 10E = O) \\ &= \begin{pmatrix} 4a + b & 2a \\ a & 3a + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2 \cdot 5^n + 2^n}{3} & \dfrac{2 \cdot 5^n - 2^{n+1}}{3} \\ \dfrac{5^n - 2^n}{3} & \dfrac{5^n + 2^{n+1}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} + \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} - 2^n}{3} \\ \dfrac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} + \dfrac{5^{n-1} + 2^n}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} \\ \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} \end{pmatrix} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

11 係数変化型

【係数変化型】

$$a_{n+1} = f(n)a_n$$

【解法と解説】

$a_n = f(n-1)a_{n-1}$ であるから以下これを繰り返して，

$$\begin{aligned} a_n &= f(n-1)\cdot f(n-2)a_{n-2} \\ &= f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot f(n-3)a_{n-3} \\ &= \cdots\cdots \\ &= f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot f(n-3)\cdot f(2)\cdot f(1)a_1 \end{aligned}$$

と処理して求めることができる．

なお，$na_{n+1} = (n+2)a_n$ のようなタイプでは，n から $n+2$ までの隣接した 3 整数の積 $n(n+1)(n+2)$ で割って処理してもよい．また，積の状態の漸化式であるから，両辺に対数をとって処理してもよい．

例題 １１

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = \frac{1}{2}\ ,\ (n-1)a_{n-1} = (n+1)a_n\ (n \geqq 2)$$

解

両辺に n を掛けて，辺々入れ替えると

$$\begin{aligned} n(n+1)a_n &= n(n-1)a_{n-1} \\ &= (n-1)(n-2)a_{n-2} \\ &= (n-2)(n-3)a_{n-3} \\ &= \cdots\cdots \\ &= 2\cdot 1\cdot a_1 \end{aligned}$$

よって，$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\ (n \geqq 2)$……(答)

この他にも,**【解法と解説】**で上げた２通りの解法を示しておこう.

別解

両辺を $(n+1)$ でわると，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-3} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-3}\cdots\cdots\frac{2}{4}\,\frac{1}{3}a_1 \\
&= \frac{2\cdot1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\ (n \geqq 2)\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

別解

両辺に底が 2 の対数をとって，

$$\log_2(n-1)+\log_2 a_{n-1} = \log_2(n+1)+\log_2 a_n$$

n に $n+1$ を代入して書き換えると，

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + \log_2\frac{n}{n+2}$$

したがって，$n \geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}
\log_2 a_n &= \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\log_2\frac{k}{k+2} \\
&= \log_2\frac{1}{2} + \log_2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\cdots\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&= \log_2\frac{1}{2}\,\frac{2}{n(n+1)} \\
&= \log_2\frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

ゆえに，$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \geqq 2)\cdots\cdots(\text{答})$

⓬ 和・一般項混合型

【和・一般項混合型】

$$S_n = pa_n + q \ (p \neq 1)$$

【解法と解説】

$S_{n+1} = pa_{n+1} + q$ であるからこれと与えられた漸化式の辺々を引くと，

$$S_{n+1} - S_n = p(a_{n+1} - a_n)$$

となる．ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるから，

$$a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) \iff a_{n+1} = \frac{p}{p-1}a_n \ (\because \ p \neq 1)$$

となり，**❷ に帰着できる**．
このようなタイプに関わらず S_n と a_n の混合型は $S_n - S_{n-1} = a_n \ (n \geqq 2)$ という式を上手く使うことでこれまでのタイプのいずれかに帰着する場合がある．
なお，$S_1 = a_1$ であることから，a_1 の値は与えられていないこともある．
✎注：$S_1 = a_1$ であることを確認する．

例題 １２

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表すとき，次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$S_n = 2a_n - 1$$

解

$S_{n+1} = 2a_{n+1} + 1$ であるから，これと与えられた漸化式の辺々引いて

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

また，$a_1 = S_1$ であることから，

$$S_1 = 2a_1 - 1 \iff a_1 = 2a_1 - 1 \iff a_1 = 1$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから，

$$a_n = 2^{n-1} \cdots\cdots (\text{答})$$

参考　フィボナッチ数列

【フィボナッチ数列】

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

【自然界に現れる数列】

この数列は自然界によく現れることで有名な数列である．前の２項の和が次の項の値になることを示しているため，一般項は常に整数値をとる．この漸化式をみたす数列の一般項は，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

となる．ここで，注目したいのは一般項は常に整数値をとるのにもかかわらず，一般項には無理数を含んでいるという点である．ちなみに，これは隣接３項間の漸化式であるから，

9 でこの一般項を導き出すことは可能である．余裕があれば求めてみてはどうだろうか？

この数列を実際に並べてかくと次のようになる．

1　1　2　3　5　8　13　21　34　55　89　144　233　……

漸化式の定義通りに数字を書いていくとこのようになる．これらの数字は,**フィボナッチ数**と呼ばれる．

ひまわりの種の配列をよく観察してみよう！左回りの螺旋と右回りの螺旋が見えてくるはずである．あるひまわりの種の配置を実際に数えると次のような結果が得られた．

$$\left.\begin{array}{lll} \text{右回り} & \cdots\cdots & 89\ \text{本} \\ \text{左回り} & \cdots\cdots & 144\ \text{本} \end{array}\right\}\cdots\cdots\ \text{合計}\ 233\ \text{本}$$

これらの数字は，どれも上で並べたフィボナッチ数になっていることがわかる．
このほかにも自然界には，このフィボナッチ数が数多く現れる．

例：パイナップルの側面にある鱗片上の並び・松ぼっくりの種の配置等

このように，自然界にいろいろフィボナッチ数が出現するのは非常に興味深い．

◀頻出８形態問題演習▶

$\boxed{2}$ 標準（解 ☞ $p.24$）

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$（(6) は $\{b_n\}$ も）の一般項を求めよ.

(1) $a_1=9$，$a_{n+1}=9a_n^3$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$

(4) $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$

(5) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{4a_n+3}$

(6) $a_1=b_1=1$，

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-2b_n \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=-a_n+3b_n \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(7) $a_1=1$，$a_2=2$，

$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

(8) $S_n=3a_n-2$

◀頻出８形態問題演習【解答】▶

【頻出８形態】

$\boxed{2}$

（1）　$a_n = 3^{(3^n - 1)}$

（2）　$a_n = \dfrac{1}{n}$

（3）　$a_n = 3^n - 2^n$

（4）　$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n$

（5）　$a_n = \dfrac{1}{5 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 4}$

（6）　$\begin{cases} a_n = \dfrac{-4^{n-1} + 4}{3} \\ b_n = \dfrac{4^{n-1} + 2}{3} \end{cases}$

（7）　$a_n = \dfrac{3^{n-1} + 1}{2}$

（8）　$a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$