確率漸化式【中級編】

【初級編】がマスターできた人は，中級編を攻略していきましょう．ここで扱う主な問題は，連立漸化式が出てくるタイプの問題です．したがって，連立漸化式の解法がまだマスターできていない人は,**漸化式の解法【中級編】**を先にやってください．

【初級編】と違って，問題が格段に複雑になるので，問題を熟読して内容の理解に努めてください．そして，問題に書かれている規則や法則がきちんと理解できたら問題に取りかかりましょう．では，まずは例題から…

例題 （′06　札幌医科大・設問を一部削除）

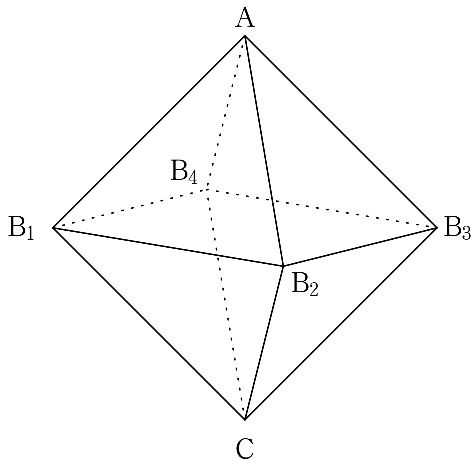
右図の正八面体 $AB_1B_2B_3B_4C$ の頂点 A を出発し，1 回ごとに等確率で隣の頂点のいずれかに移動する点 X がある．

例えば n 回目の移動後に点 X が頂点 B_1 にいたとすると $n+1$ 回目には頂点 A, B_2, B_4, C のいずれかに，それぞれ $\frac{1}{4}$ の確率で移動する．

n 回目の移動後に，点 X が頂点 A にいる確率を a_n ，頂点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにいる確率を b_n ，頂点 C にいる確率を c_n とする（$n \geqq 1$）．

（1）　$a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n を用いて，それぞれ表せ．

（2）　b_n を n の式で表せ．

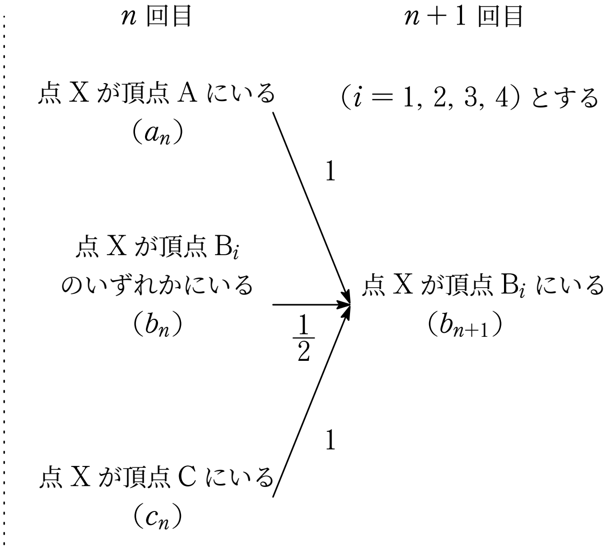


問題をみると，$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の 3 つの数列があることがわかります．つまり，連立漸化式を立式しなければいけません．その手順は**【初級編】**でやったこととまったく同じです．では，解説していきましょう．

解答 と **解説**

（1）　規則が少々ややこしいので，しっかりと問題を読んで理解出来たでしょうか？（1）ではいきなり漸化式を立式しなさいということなので，また**【初級編】**と同様に図をかいて考えてみましょう．

A, C に関しては単純なので，B のときの図を右のようにかきました．では，解答です．



$n+1$ 回目に 頂点 A に行くためには，n 回目には B_i（$i=1, 2, 3, 4$）のいずれかにいなければならないので，

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

である．頂点 C に関しても同様であるから，

$$\boldsymbol{c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

である．次に頂点 B_i については，n 回目に頂点 A

または C にいれば $n+1$ 回目は必ず頂点 B_i にいるので，移動の確率は 1 であり，n 回目に頂点 B_i のいずれかにいれば $n+1$ 回目に頂点 B_i にいる確率は $\frac{1}{2}$ となることから，

$$\boldsymbol{b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　(1) では連立漸化式を立式しましたが，その初項は求めていませんからこれでは解けません．問題では問われていませんが，自分で初項を求めることが必要になります．

始め点 X は頂点 A にいるので，1 回の移動では必ず頂点 B_i にいる．よって，

$$a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{4},\ b_2 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

また，(1) の結果から，$a_n = c_n$ であることがわかる．(1) で求めた漸化式から，

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = 2\cdot\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} \quad\Longleftrightarrow\quad b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

が得られる．

これは隣接３項間漸化式ですね！特性方程式を駆使して解きましょう！

$$\begin{aligned} b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \iff b_{n+2} + \frac{1}{2}b_{n+1} &= b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ &= b_n + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ &= \cdots\cdots \\ &= b_2 + \frac{1}{2}b_1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 \quad (\because ①) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ゆえに，

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad b_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{2}{3}\right)$$

と式変形できるので，数列 $\left\{b_n - \frac{2}{3}\right\}$ は，初項 $b_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$b_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

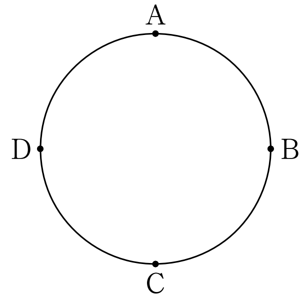
◇　♡

このような問題は，連立漸化式の立式はそれほど難しくなくそれを解く方が難しいことが多々あります．したがって，数列の漸化式がしっかりと解けるようになっておくことが必要なのです．

◀類題演習▶

6 （'05　京都府立大・問題文の文字を変更）　解答 ☞ p.13

右の図のように円周上の 4 点 A, B, C, D の上を次の規則で移動する点 Q を考える．さいころを振って，1 の目が出れば時計の針の回転と同じ向きに隣の点に移動し，2 の目が出れば時計の針の回転と逆向きに隣の点に移動する．また，3, 4, 5, 6 の目が出れば移動しない．Q は最初 A にあったものとする．さいころを n 回振った後で Q が A, B, C, D 上にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とおく．



（1）　a_1, a_2 を求めよ．

（2）　$a_{n+1}+c_{n+1}$ と a_n+c_n との間に成り立つ関係式を求めよ．

（3）　a_n を n の式で表せ．

7 （'07　東京工科大・穴埋め問題を記述式問題に変更）　解答 ☞ p.15

袋 A には赤玉のみ 2 個，袋 B には青玉のみ 3 個入っている．いま，

「A から玉を 1 個取り出しそれを B に入れ，次いで B から玉を 1 個取り出しそれを A にいれる」

という試行を行う．この試行を n 回（$n=1, 2, 3, \cdots$）行ったとき，A に赤玉のみ 2 個入っている確率を p_n，A に赤玉と青玉が 1 個ずつ入っている確率を q_n，A に赤玉が 1 個も入っていない確率を r_n とする．

（1）　p_1, q_1, r_1 を求めよ．

（2）　p_{n+1}, q_{n+1} をそれぞれ p_n, q_n を用いて表せ．

（3）　p_n を求めよ．

次の **8** は確率の問題ではありませんが，漸化式を立式して解いていくという考え方が同じなので挙げておきます．

8 （'06　九州工業大・設問を一部省略）　解答 ☞ p.17

赤玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 2 個の白玉に変化する．白玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 1 個の赤玉と 1 個の白玉に変化する．時刻 $t=1$（分）に装置 M へ赤玉を 1 個入れ，以降，1 分経過ごとに装置 M へ赤玉を 1 個追加する．時刻 $t=n$（分）における装置 M 中の赤玉と白玉の個数をそれぞれ a_n と b_n ($n=1, 2, \cdots$) とする．このとき，時刻 $t=3$（分）までの赤玉と白玉の個数は，$a_1=1, a_2=1, a_3=3, b_1=0, b_2=2, b_3=4$ となる．以下に答えよ．

（1）　a_{n+1} を b_n を用いて表し，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

（2）　a_{n+2}, a_{n+1}, a_n ($n=1, 2, \cdots$) がみたす関係式を求めよ．

（3）　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

6 解答 と 解説

さいころを 1 回振ったとき，1 の目が出る，2 の目が出る，3〜6 の目が出る事象をそれぞれ X, Y, Z とすると，X, Y, Z が起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$ である．

(1) さいころを 1 回振って A にいるためには Z が 1 回起こればよいので，$a_1=\frac{4}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$……(**答**)

また，さいころを 2 回振って A にいるためには

Z が 2 回連続で起こる，または，X, Y が 1 回ずつ起こる

のいずれかであるから，

$$a_2=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}+2\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{18}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\text{……(答)}$$

(2) $n+1$ 回目に A にいるためには，

n 回目に D にいて，X が起こる．
n 回目に B にいて，Y が起こる．
n 回目に A にいて，Z が起こる．

のいずれかである．よって，

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}d_n \quad \text{……①}$$

が成り立つ．同様にすると，

$$c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}d_n \quad \text{……②}$$

が成り立つ．ここで，点 Q は必ず 4 点 A, B, C, D のいずれかにあるから，

$$a_n+b_n+c_n+d_n=1 \iff b_n+d_n=1-(a_n+c_n)\text{……③}$$

である．①＋② より，

$$\begin{aligned} a_{n+1}+c_{n+1} &= \frac{2}{3}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}(b_n+d_n) \\ &= \frac{2}{3}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}\{1-(a_n+c_n)\} \quad (\because \text{③}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}}\text{……(答)}$$

(3) 題意より，$c_1=0$ である．(2) より，

$$a_{n+1}+c_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n+c_n-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので，数列 $\left\{a_n+c_n-\frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $a_1+c_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$a_n+c_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \iff a_n+c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{……④}$$

となる．また，①－② より，

$$\begin{aligned} a_{n+1}-c_{n+1} &= \frac{2}{3}(a_n-c_n) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2(a_{n-1}-c_{n-1}) \\ &= \cdots\cdots \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n(a_1-c_1) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ \therefore \quad a_n-c_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{……⑤} \end{aligned}$$

である．よって，④＋⑤ より，

$$2a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

もう漸化式の立式にも随分慣れてきたと思うので，確率遷移図は省略しました．連立漸化式の解法が最大のポイントになることは言うまでもありませんが，本問では (2) で誘導されているので，比較的方針が立ちやすいのではないかと思います．(3) では (2) で求めたことを活かすため，$a_{n+1} - c_{n+1}$ と $a_n - c_n$ の関係式が必要になることを誘導なしに気付かなければいけません．連立方程式を解くときと同じような考え方を使います．
確率漸化式を解く上で次の式が成り立っていることに気付いたでしょうか？

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$

当たり前のようですが，この関係式に気付かなくて漸化式が解けないという声をよく聞きます．隠れた条件ですが，非常に大切な関係式です．いつもこのようになっているとは言えませんが，状況をよく判断してこの関係式を見つけてください．確率漸化式を解くにあたって最も重要な関係式と言っても過言ではないでしょう．

7 解答 と 解説

赤玉を●，青玉を○で表し，袋 A と袋 B の中の状態 P, Q, R を次のようにする．

P	Q	R
A ●●	A ●○	A ○○
B ○○○	B ●○○	B ●●○

(1) 始めは状態 P である．A から玉を 1 個 B へ移動させると，下図のような状態になるので，求める確率は，

$$\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{4},\ q_1 = \frac{3}{4},\ r_1 = 0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

A ●
B ●○○○

(2) (1) より，題意の試行を 1 回行うと，

$$\mathrm{P} \to \mathrm{P} \text{ の確率は，} \frac{1}{4}\ ,\quad \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \text{ の確率は，} \frac{3}{4}$$

となることがわかる．また，Q の状態で玉を 1 個 A から B へ移すと，下図のいずれか一方の状態に $\frac{1}{2}$ の確率でなる．
よって，

A ●
B ●○○○

A ○
B ●●○○

$$\mathrm{Q} \to \mathrm{P} \text{ の確率は，} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Q} \to \mathrm{Q} \text{ の確率は，} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4} = \frac{5}{8}$$

である．さらに，R の状態で玉を 1 個 A から B へ移すと，下図のようになるので，

$$\mathrm{R} \to \mathrm{Q} \text{ の確率は，} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A ○
B ●●○○

以上から，求める漸化式は，$p_n + q_n + r_n = 1$ を用いると，

$$p_{n+1} = p_n\cdot\frac{1}{4} + q_n\cdot\frac{1}{8} \iff \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}q_n}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$q_{n+1} = p_n\cdot\frac{3}{4} + q_n\cdot\frac{5}{8} + r_n\cdot\frac{1}{2} \iff q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{5}{8}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n)$$

$$\iff \boldsymbol{q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}q_n + \frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) (2) の結果から，

$$q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{1}{2} \iff q_n = p_n + \frac{1}{2}\ (\text{これは } n = 1 \text{ のときも成り立つ．})$$

これを，$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}q_n$ へ代入すると，

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}\left(p_n + \frac{1}{2}\right) \iff p_{n+1} = \frac{3}{8}p_n + \frac{1}{16}$$

$$\iff p_{n+1} - \frac{1}{10} = \frac{3}{8}\left(p_n - \frac{1}{10}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{10}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$ ，公比 $\frac{3}{8}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{p_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^n}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

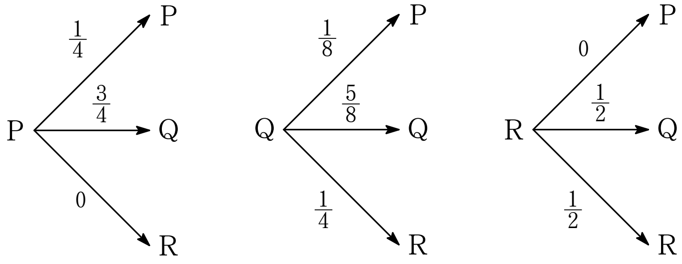
♣ ◇ ♠ ♡

解説

問題を熟読して，ルールをしっかりと把握しましょう．ルールを勘違いすると，全滅しかねません．(1) では玉を入れ替えるわけではないので，

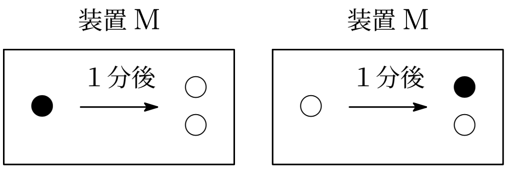
$$p_1 = 0,\ q_1 = 1,\ r_1 = 0$$

とはなりません．もちろん，(2) で漸化式を立式するときも同様です．このような問題で勘違いをしないためには，ゲームに参加しているつもりで玉を動かしてみることです．それだけでも随分ケアレスミスは防げるでしょう．
参考のため，1 回の試行によって状態がいくらの確率で変化するかを表す確率遷移図をかいておきます．



8 解答 と 解説

赤玉を●，白玉を○とすると，問題文から装置 M の中の玉の変化は下図のようになる．



(1)　n 分経過後，a_n 個の赤玉と b_n 個の白玉が入っていて，そこから 1 分経過すると，

a_n 個の赤玉は $2a_n$ 個の白玉に変化し，

b_n 個の白玉は b_n 個の赤玉と b_n 個の白玉に変化する．

赤玉が新たに 1 個追加されるので，求める漸化式は，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=b_n+1\ ,\ b_{n+1}=2a_n+b_n}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$a_{n+1}=b_n+1$ より，

$$b_n=a_{n+1}-1\ ,\ b_{n+1}=a_{n+2}-1$$

であるから，$b_{n+1}=2a_n+b_n$ へ代入して，

$$a_{n+2}-1=2a_n+a_{n+1}-1 \iff \boldsymbol{a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)\quad\cdots\cdots ①$$
$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)\quad\cdots\cdots ②$$

となる．① より，

$$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)\cdot 2^{n-1}=2^n\ \cdots\cdots③\quad(\because\ a_1=a_2=1)$$

であり，② より，

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n\ \cdots\cdots④\quad(\because\ a_1=a_2=1)$$

であるから，③－④ より，

$$3a_n=2^n-(-1)^n \iff \boldsymbol{a_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

また，$b_n=a_{n+1}-1$ より，

$$b_n=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}-1 \iff \boldsymbol{b_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n-3}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

♣ ♢ ♠ ♡

解説

(3) で隣接３項間漸化式を解くことになります．最初の式変形は，特性方程式を用いて行っていますので，その方法がわからない場合は，漸化式の解法【中級編】を参照してください．